

**FORTSETZUNG DES HOLOMORPHEN FUNKTIONALKALKÜLS
IN MEHREREN VARIABLEN AUF ALGEBREN
MIT ZERLEGUNG DER EINS**

Dissertation

zur Erlangung des Grades

„Doktor der Naturwissenschaft“

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Bernd Droste
geb. in Wuppertal

Mainz 1980



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552623_0091

**FORTSETZUNG DES HOLOMORPHEN FUNKTIONALKALKÜLS
IN MEHREREN VARIABLEN AUF ALGEBREN
MIT ZERLEGUNG DER EINS**

Dissertation

zur Erlangung des Grades

„Doktor der Naturwissenschaft“

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Bernd Droste
geb. in Wuppertal

Mainz 1980



1. Berichterstatter: Prof. Dr. B. Gramsch
2. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Gottschling
3. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Meise (Düsseldorf)

Tag der mündlichen Prüfung: 18.6.1980

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
Kapitel I : Holomorphe Approximation in Räumen ultradifferenzierbarer Funktionen	1
§ 1. Fortsetzung ultradifferenzierbarer Funktionen auf total-reellen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$	3
§ 2. Konstruktion von Umgebungssystemen aus Holomorphiegebieten	24
§ 3. Die Approximationssätze	29
Kapitel II : Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls	52
§ 4. Der holomorphe Funktionalkalkül in mehreren Variablen für kommutative Banachalgebren und der Funktionalkalkül von J.L. Taylor	53
§ 5. Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls auf die Algebra $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ bzw. $C^\infty(M)$, $M \subset \mathbb{C}^n$ total-reelle Untermannigfaltigkeit	67
§ 6. Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls auf Algebren differenzierbarer Funktionen mit teilweise Zerlegung der Eins	83
Anhang :	
§ 7. Ultradifferenzierbare Funktionen auf ultradifferenzierbaren Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$	110
Zusatz-Bemerkungen	130
Zusammenfassung	131
Symbolverzeichnis	132
Literaturverzeichnis	135

Einleitung

Die Existenz eines holomorphen Funktionalkalküls für n Elemente einer kommutativen Banachalgebra A über $\mathbb{C}$ mit Einselement e wurde erstmals von Shilov [49] für endlich erzeugte Banachalgebren und dann allgemein von Arens/Calderón [6] und Waelbroeck [55] bewiesen: Zu $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ existiert ein stetiger Algebromorphismus $\phi_a: \mathcal{O}(\sigma(a)) \longrightarrow A$ mit $\phi_a(1) = e$ und $\phi_a(z_j) = a_j$ für $j=1, \dots, n$, hierbei bezeichne $\sigma(a)$ das gemeinsame Spektrum von a in A , $\mathcal{O}(\sigma(a))$ die Algebra der Keime holomorpher Funktionen auf (einer offenen Umgebung von) $\sigma(a)$ versehen mit der lokalkonvexen induktiven Limestopologie $\mathcal{O}(\sigma(a)) := \text{ind}_{U \supset \sigma(a) \text{ offen}} \mathcal{O}(U)$, sowie z_j den Keim der j -ten Koordinatenfunktion auf $\sigma(a)$.

Wir untersuchen in dieser Arbeit das folgende Fortsetzungs-Problem: Unter welchen Bedingungen kann ϕ_a zu einem stetigen Algebromorphismus auf eine Funktionenalgebra fortgesetzt werden, die größer ist als $\mathcal{O}(\sigma(a))$ (und eine gröbere Topologie trägt) ?

Es gibt eine Reihe von Lösungen zu diesem Problem in speziellen Situationen, so konnte Tillmann [53] mithilfe der von ihm entwickelten Randwertcharakterisierung von Vektor-Distributionen zeigen, daß für $n=1$, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ und $\|(z-a)^{-1}\| \leq C \cdot d(z, \sigma(a))^r$ für $z \in V := \{y \in \mathbb{C} \mid d(y, \sigma(a)) < 1\}$, ($d(z, \sigma(a))$ euklidische Distanz von z zu $\sigma(a)$) der holomorphe Funktionalkalkül für a eindeutig zu einem stetigen Algebromorphismus auf $C^\infty(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann. Dieser Ansatz wurde von verschiedenen Autoren fortgeführt, wir erwähnen für den Fall $n=1$ Colojoară/Foiaş [12], Maeda [34], Ljubič/Macaev [33] und Cioranescu [10], sowie für $n \geq 1$ und $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^n$ Albrecht [1], der Wachstumsbedingungen an die Exponentialgruppe $\{\exp(i(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n)) \mid t \in \mathbb{R}^n\}$ unter Benutzung der Fouriertransformation angibt. Eine sehr allgemeine Lösung für den Fall $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^n$ und (exponentiellem) Wachstum der Exponentialgruppe bzw. der Resolvente wurde von Gramsch [18], [19] mithilfe von Graphensätzen gegeben.

Ein anderer Zugang zur Lösung des Fortsetzungsproblems stammt von Waelbroeck [57]: Sei $n=1$ und $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ beliebig, so wird eine Banachalgebra X von Funktionen f auf einer (kompakten) Umgebung Σ von $\sigma(a)$ in $\mathbb{C}$ definiert, wobei f kompakten Support hat und $\bar{\partial} f$ bei Annäherung an $\sigma(a)$ flach ist in Abhängigkeit vom Wachstum von $\|(z-a)^{-1}\|$. Die Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls wird dann durch die Cauchy-Formel

$\tilde{\phi}_a(f) := -1/(2\pi i) \int_{\Sigma \cap \sigma(a)} \bar{\partial} f \wedge (z-a)^{-1} dz$ definiert. Da für das abgeschlossene Ideal $Y := \{f \in X \mid (\text{supp } f) \cap \sigma(a) = \emptyset\} \subset X$ gilt $Y \subset \ker \tilde{\phi}_a$, kann damit der holomorphen Funktionalalkül auf die Banachalgebra X/Y fortgesetzt werden. Dieser Ansatz wurde von Wrobel [61], [62] und Nguyen t.H. [37], [38] auf den Fall $n \geq 1$ verallgemeinert.

Die Frage, die wir im folgenden behandeln ist, ob ϕ_a fortgesetzt werden kann, falls $\sigma(a) \subset S \subset \mathbb{C}^n$ (für geeignete, möglichst allgemeine $S \subset \mathbb{C}^n$) auf 'konkrete' Funktionenalgebren, die Zerlegung der Eins besitzen (zumindest auf einem Teil ihres Definitionsbereichs).

Wir beweisen in dieser Arbeit zwei Sätze (Satz 5.1., Satz 6.1.), die diese Frage positiv beantworten für den Fall, daß $\sigma(a)$ ganz oder teilweise auf einer total-reellen Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{C}^n$ liegt (d.h. M hat keine komplexen Tangenten) und falls die Differentialform $\omega :=$

$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bar{\partial} u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\bar{\partial} u_j} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} u_n$ eine gewisse exponentielle Wachstumsbedingung bei Annäherung an M erfüllt, hierbei seien $u_1, \dots, u_n \in C^\infty(\mathbb{C}^n \setminus \sigma(a), A)$ mit $\sum_{j=1}^n (z_j - a_j) u_j(z) = e$. Wir zeigen, daß unter dieser

Bedingung ϕ_a eindeutig fortgesetzt werden kann zu einem stetigen Algebromorphismus $\tilde{\phi}_a: \mathcal{E}^{(M_p)}(M) \rightarrow A$, falls $\sigma(a) \subset M$, M $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{R}} M = n$. Hierbei bezeichne $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ die Algebra aller ultradifferenzierbaren Funktionen der Klasse (M_p) auf M (vgl. §1, §7); zur Theorie ultradifferenzierbarer Funktionen siehe Roumieu [45], [46], Björck [7] und Komatsu [29]. Ist $\sigma(a) \subset S$, wobei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $K_0 \subset S$ kompakte Teilmenge so, daß $M := S \setminus K_0$ total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$, so können wir unter einer zusätzlichen Bedingung ebenfalls zeigen, daß ϕ_a eindeutig fortgesetzt werden kann zu einem stetigen Algebromorphismus $\tilde{\phi}_a: \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0) \rightarrow A$. Hierbei bezeichne

$\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ den Raum aller auf M (M_p) -differenzierbaren und auf (einer offenen Umgebung von) K_0 holomorphen Funktionen, versehen mit einer natürlichen Topologie (Def. 3.8.).

Unser Beweis der oben zitierten Sätze benutzt, daß die auf einer offenen Umgebung von M holomorphen Funktionen dicht liegen in $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (Satz 3.14.), entsprechendes gilt unter einer zusätzlichen Bedingung auch für den Raum $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ (Satz 3.9.). Diese beiden Sätze über holomorphe Approximation, die auch von unabhängigem Interesse sind, beweisen wir

in Kapitel I (§1, §2, §3, wir verweisen auch auf die Einleitung von Kap. I) mithilfe von $\bar{\partial}$ -Methoden aus der komplexen Analysis sowie einiger Methoden aus der Theorie partieller Differentialgleichungen, (als Standardreferenz verweisen wir auf Hörmander [23]). Ausgangspunkt der Überlegungen in Kap. I sind die Arbeiten von Nirenberg/Wells [36] und Hörmander/Wermer [26].

In §4 zeigen wir unter anderem, daß der holomorphe Funktionalkalkül ϕ_a eine Integraldarstellung besitzt, die als vektorwertiges Analogon zur Cauchy-Fantappiè-Koppelman Formel angesehen werden kann (Satz 4.7.).

§5 und §6 bringen dann den Beweis der beiden oben genannten Fortsetzungssätze. Wir erwähnen, daß auch bei Spezialisierung von Satz 6.1. bzw.

Satz 6.3. auf den Fall $\sigma(a) \subset S = \text{Kurve mit Kreuzpunkt in } \mathbb{C} \ (n=1)$, d.h. sowohl bei exponentiellem als auch bei polynomialem Wachstum der Resolvente die Fortsetzung von ϕ_a auf eine Algebra mit Zerlegung der Eins ein zusätzliches Ergebnis beifallt. Für die Fortsetzung $\tilde{\phi}_a$ des holomorphen Funktionalkalküls beweisen wir jeweils einen Spektralabbildungssatz für Systeme von Funktionen (Satz 6.16., Satz 6.12.). Wir bemerken noch, daß falls $a=(a_1, \dots, a_n)$ ein n -Tupel kommutierender stetiger linearer Operatoren auf einem Banachraum ist, unsere Fortsetzungssätze auch für das Taylorspektrum und den holomorphen Funktionalkalkül von J.L. Taylor [50], [51] gelten, (Bem. 4.12.).

Schließlich fügen wir der Arbeit noch einen Anhang (§7) hinzu, in dem Sätze über die Invarianz ultradifferenzierbarer Funktionen unter Komposition und unter Bildung der Umkehrfunktion bewiesen werden. Dies ermöglicht dann eine sinnvolle Definition von ultradifferenzierbaren Funktionen auf ultradifferenzierbaren Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{P}^n$ vom gleichen Typ und die Einführung einer geeigneten Topologie auf Räumen solcher Funktionen.

Herrn Prof. Dr. B. Gramsch danke ich sehr herzlich für die Anregung dieser Arbeit sowie für zahlreiche Gespräche und Hinweise.

Kapitel I : Holomorphe Approximation in Räumen ultradifferenzierbarer Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ (vgl. §1, S.5) und M sei total-reell (d.h. für alle $x \in M$ enthält der Tangentialraum $T_x(M) \subset \mathbb{C}^n$ keinen komplexen Teilraum $\neq \{0\}$ von $\mathbb{C}^n$). Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ bezeichne $\mathcal{O}(U)$ die Fréchet-Algebra aller holomorphen Funktionen auf U mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von U . Für eine Teilmenge $S \subset \mathbb{C}^n$ bezeichne $\mathcal{O}(S)$ den Raum der Keime holomorpher Funktionen auf einer offenen Umgebung von S , versehen mit der lokalkonvexen induktiven Limestopologie $\mathcal{O}(S) := \varinjlim_{\substack{U \supset S \\ \text{offen}}} \mathcal{O}(U)$.

Offenbar haben wir die kanonische Restriktionsabbildung $\mathcal{P}: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ bzw. $\mathcal{P}: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$. In diesem Kapitel behandeln wir das folgende Problem: Wir fragen, ob die Abbildung $\mathcal{P}$ dichtes Bild hat, d.h. liegen die in einer offenen Umgebung von M holomorphen Funktionen dicht in $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$? Die Antwort ist positiv, wie wir in §3, Satz 3.14. beweisen. Für die Räume $C^r(M)$, $0 \leq r \leq \infty$, $M \subset \mathbb{C}^n$ total-reelle C^k -Untermannigfaltigkeit, wurde diese Frage bereits von Harvey/Wells [23] (für $k=r+1$) und Range/Siu [43] (für $k=r$) gelöst, man vergleiche auch die Arbeiten von Nirenberg/Wells [36], Hörmander/Wermer [26] und Čirka [11], sowie den Übersichtsartikel von Wells [58].

In der Arbeit von Hörmander/Wermer [26] wurde die oben genannte Problemstellung der holomorphen Approximation noch erweitert und unter anderem der folgende Satz bewiesen: Sei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $K_0 \subset S$ eine kompakte Teilmenge so, daß $M := S \setminus K_0$ eine total-reelle C^k -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n$ ist für $k \in \mathbb{N}$ genügend groß. Sei $\mathcal{P}: \mathcal{O}(S) \rightarrow C(S)$ die kanonische Restriktion und S habe eine Umgebungsbasis aus Holomorphiegebieten, dann gilt für $f \in C(S)$ mit $f \in \mathcal{O}(K_0)$, daß $f \in \overline{\mathcal{P}(\mathcal{O}(S))}$.

Wir beweisen nun, daß dieser Satz in einer entsprechenden Form auch für (ultra)differenzierbare Funktionen gilt: Bezeichne $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ den Raum aller auf M (M_p)-differenzierbaren und auf (einer offenen Umgebung von) K_0 holomorphen Funktionen versehen mit einer natürlichen Topologie (siehe Def. 3.8.), wobei $M := S \setminus K_0$ hier $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit. Entsprechend definiere man den Raum $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ und den Raum $C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0))$. Besitzt nun S ein geeignetes Umgebungssystem aus Holomorphiegebieten (siehe Satz 3.9.), so hat die kanonische Abbildung

$\mathcal{F}: \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ dichtes Bild, (ebenso $\mathcal{F}: \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ und $\mathcal{F}: \mathcal{O}(S) \rightarrow C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0))$).

Von Hörmander wurde 1965 (vgl. die Einleitungen in [36] und [26], sowie Wells [58], Abschnitt 3) eine grundlegende Beweismethode für die holomorphe Approximation von stetigen bzw. C^r -Funktionen, $1 \leq r \leq \infty$, auf total-reellen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$ vorgeschlagen, die in den oben zitierten Arbeiten verwendet wird.

In dem vorliegenden Kapitel werden wir diese Beweismethode verfeinern und Abschätzungen beweisen, die es erlauben, die angekündigten Approximationssätze für ultradifferenzierbare Funktionen zu zeigen. Hieraus ergibt sich die folgende Gliederung von Kapitel I: In §1 zeigen wir, daß jede Funktion $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$), $M \subset \mathbb{C}^n$ total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit, auf eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}^n$ von M zu $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$) so fortgesetzt werden kann, daß $\bar{\partial}F$ auf M in allen partiellen Ableitungen verschwindet (Satz 1.5., Kor. 1.11.).

(Dies hat eine exponentielle Flachheit von $\bar{\partial}F$ bei Annäherung an M zur Folge, wie später in Satz 3.7. gezeigt wird.) Ein entsprechendes Ergebnis erhält man für die oben angegebenen kompakten Mengen $S = (M \cup K_0) \subset \mathbb{C}^n$ und $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ bzw. $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathcal{O}(M, K_0))$, hierzu muß jedoch ein etwas aufwendiger technischer Beweis zum Zusammensetzen lokaler Fortsetzungs-Lösungen nahe M mit dem holomorphen Teil in einer Umgebung von K_0 geführt werden, (vgl. Kor. 1.12.). §2 enthält einige Aussagen über die Wahl geeigneter pseudokonvexer Umgebungsbasen zu kompakten Teilmengen K total-reeller C^∞ -Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{C}^n$, (siehe Satz 2.4., 2.5., 2.6.) sowie für die oben definierten Mengen $S \subset \mathbb{C}^n$ (Satz 2.7.). Auf solchen Umgebungen U_ϵ kann das $\bar{\partial}$ -Problem $\bar{\partial}g_\epsilon = v$ mit $v := \bar{\partial}F$ gelöst werden und es gilt die L^2 -Abschätzung $\|g_\epsilon\|_{L^2(U_\epsilon)} \leq C \cdot \sup_{1 \leq j \leq n} \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F \right\|_{L^2(U_\epsilon)}$

für festes $C > 0$, außerdem ist $g_\epsilon = F - h_\epsilon$, wobei h_ϵ holomorph auf U_ϵ .

Wir beweisen dann in §3 eine sehr scharfe Form einer inneren elliptischen Abschätzung für C^∞ -Funktionen (Satz 3.5.), welche die obige L^2 -Abschätzung in einer für ultradifferenzierbare Funktionen geeigneten Weise verschärft zu einer Abschätzung von $D^\alpha g_\epsilon$ auf $K \subset M$ für $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$; analoges gilt für die Mengen $S \subset \mathbb{C}^n$. Hierdurch gelingt es, die Approximationssätze lokal bzw. auf kompakten Mengen zu beweisen. Um von den lokalen Aussagen auf globale Approximationsaussagen zu schließen, benötigt man einerseits

die in Satz 2.6. konstruierten pseudokonvexen Umgebungen für $\overline{M \cap U}$, $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, die zusätzlich feste δ -Umgebungen von kompakten $\tilde{K} \subset M \cap U$ umfassen, andererseits das Verschwinden der Kohomologiegruppen $H^1(\Omega, \mathcal{O})$, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ aus einer Umgebungsbasis von M aus pseudokonvexen offenen Mengen ist (Satz 2.5.). Die Existenz einer solchen Umgebungsbasis ist Folge einer Verallgemeinerung von Grauert's Satz über tubulare Umgebungen durch Harvey/Wells [23], Abschnitt 2, vgl. auch Range/Siu [43]. Der lokal-global Beweis folgt dann mit einem garbentheoretischen Standardschluß. Wir beenden §3 mit der Angabe eines Beispiels zu Satz 3.9.. Wir geben kompakte Mengen $S \subset \mathbb{C}^2$ an, so daß für eine kompakte Teilmenge $K_0 \subset S$ die Menge $M := S \setminus K_0$ eine reell-analytische total-reelle Untermannigfaltigkeit ist (insbesondere ist S nicht Abschluß seiner inneren Punkte) und S hat eine Umgebungsbasis aus Holomorphiegebieten (Beispiel 3.15.).

§ 1. Fortsetzung ultradifferenzierbarer Funktionen auf total-reellen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$

Räume ultradifferenzierbarer Funktionen sowie deren Dualräume wurden von Roumieu [45],[46] und Beurling sowie Björck [7] eingeführt. Eine ausführliche Theorie ultradifferenzierbarer Funktionen und Ultradistributionen findet man bei Komatsu [29], [30], dessen Terminologie und Resultate wir hier verwenden wollen. Wir gehen kurz auf die Definition ultradifferenzierbarer Funktionen ein: Hierzu sei M_p , $p \in \mathbb{N}$, eine Folge positiver reeller Zahlen mit den Eigenschaften

$$(M1) \quad \frac{M_p}{p M_{p-1}}, \quad p \in \mathbb{N}_+, \quad \text{ist nichtfallend} \quad \text{"Stabilität unter Komposition"}$$

$$(M2) \quad \begin{matrix} \exists \\ A > 0 \\ H > 0 \end{matrix} \quad \forall \quad p \in \mathbb{N} \quad M_p \leq A \cdot H^p \cdot \min_{0 \leq q \leq p} M_{p-q} M_q \quad \text{"Stabilität unter Ultradifferentialoperatoren"}$$

$$(M3) \quad \begin{matrix} \exists \\ A > 0 \end{matrix} \quad \forall \quad p \in \mathbb{N} \quad \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leq A \frac{p \cdot M_p}{M_{p+1}} \quad \text{"Strenge Nicht-Quasianalytizität"}$$

Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, erfülle M_p , $p \in \mathbb{N}$, im folgenden stets die Bedingungen $(\tilde{M}1)$, $(M2)$ und $(M3)$.

Beispiel: Definieren wir für $s > 1$ die Gevrey-Folge $M_p := p!^s$, so erfüllt diese $(\tilde{M}1)$, $(M2)$ und $(M3)$.

Wir bemerken außerdem, daß $(\tilde{M}1) \Rightarrow (M1)$: $\forall_{p \in \mathbb{N}} M_p^2 \leq M_{p-1} \cdot M_{p+1}$ gilt,

$(M1)$ ist die "logarithmische Konvexität" von M_p , $p \in \mathbb{N}$. $(\tilde{M}1)$ bedeutet gerade, daß die Folge $M_p/p!$ logarithmisch konvex ist, d.h. $(M1)$ erfüllt.

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und M_p , $p \in \mathbb{N}$, wie oben. Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ bezeichne $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ sowie $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Wir definieren

(1.1) $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega) := \{ f \in C^\infty(\Omega) \mid \forall K \subset \Omega \text{ (regulär) kompakt } \forall h > 0 \text{ gilt}$

$$\|f\|_{M_p, h, K} := \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} < \infty \}$$

$\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ heiße Raum der $\{M_p\}$ -differenzierbaren Funktionen (Beurling Typ).

Versehen mit den Halbnormen $\|\cdot\|_{M_p, h, K}$ wird $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ zu einem Fréchet-Raum, vgl. Komatsu [29], Theorem 2.6..

Falls nicht anders bemerkt, meinen wir mit Funktionen stets komplexwertige Funktionen.

Ebenso sei

(1.1') $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega) := \{ f \in C^\infty(\Omega) \mid \forall K \subset \Omega \text{ (regulär) kompakt } \exists h > 0, \text{ so daß}$

$$\|f\|_{M_p, h, K} < \infty \}$$

$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ heiße Raum der $\{M_p\}$ -differenzierbaren Funktionen (Roumieu Typ).

Wir versehen $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ mit der Topologie $\text{proj}_{K \subset \Omega} \text{ind}_{h \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{\{M_p\}, h}(K)$, wobei

$K \subset \Omega$ regulär kompakt und $\mathcal{E}^{\{M_p\}, h}(K)$ der Banachraum aller Whitney-Funktionen $f \in C^\infty(K)$, für die $\|f\|_{M_p, h, K} < \infty$ mit der Norm $\|\cdot\|_{M_p, h, K}$, vgl. Komatsu [29], S. 40ff, sowie Malgrange [35], I.1. .

Wir bemerken, daß jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ durch eine Folge regulär kompakter Mengen ausgeschöpft werden kann.

$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ ist ein (DLF)-Raum, d.h. der starke Dualraum eines strikten induktiven Limes einer Folge von Fréchet-Räumen, siehe Komatsu [30], Theorem 4.6. .

Insbesondere sind die Räume $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ und $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ vollständige lokal-konvexe Hausdorffräume, die außerdem bornologisch und nuklear sind, siehe Komatsu [29], Theorem 2.6. und Theorem 5.12. .

Zu einer Folge M_p mit $\lim_{p \rightarrow \infty} M_p^{1/p} = \infty$ definieren wir die assoziierte Funktion $M: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ durch $M(x) := \log \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{x^p M_p}{M_p}$, $x \in \mathbb{R}_+$,

außerdem bezeichne $M^*(x)$ die zu $M_p/p!$ assoziierte Funktion, vorausgesetzt es ist $\lim_{p \rightarrow \infty} (M_p/p!)^{1/p} = \infty$.

Wir bemerken, daß für die Gevrey-Folgen $M_p = p!^s$, $s > 1$, die assoziierte Funktion $M(x)$ äquivalent zu der Funktion $x \mapsto x^{1/s}$, $x \in \mathbb{R}_+$, ist in dem Sinne, daß Konstanten $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ existieren mit

$$(1.2) \quad M(h_1 x) + \log B_1 \leq x^{1/s} \leq M(h_2 x) + \log B_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+.$$

Eine k -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$, heiße $\{M_p\}$ - (bzw. (M_p) -) differenzierbar (oder kurz $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit), wenn für die lokalen Diffeomorphismen h , die eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $x \in M$ bijektiv auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ abbilden, so daß $h(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, gilt, daß mit $h = (h_1, \dots, h_n)$ $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$). (Man vergleiche hierzu Anhang, Def. 7.5.).

Da wegen $(\tilde{M}_1)$ $\{M_p\}$ - (bzw. (M_p) -) differenzierbare $(\mathbb{R}^n$ -wertige) Funktionen invariant unter Bildung der Umkehrfunktion sind (siehe Anhang, Satz 7.3.), folgt hieraus auch, daß mit der Definition $h^{-1} := g = (g_1, \dots, g_n)$ auch $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$).

Wie üblich können wir nun $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeiten durch lokale Gleichungen darstellen: Für alle $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x und reellwertige Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$), so daß

$$(1.3) \quad M \cap U = \{y \in U \mid \varphi_1(y) = \dots = \varphi_{n-k}(y) = 0\} \quad \text{und}$$

$$(1.3') \quad \text{die Matrix } B(y) := \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \varphi_m(y) \right) \right)_{\substack{1 \leq m \leq n-k \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{hat Rang } n-k \\ \text{für } y \in M \cap U.$$

Die $\{M_p\}$ - (bzw. (M_p) -) Differenzierbarkeit von $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k}$ folgt,

da $g_m(x) := h_{k+m}(x)$ für $x \in U$, $m=1, \dots, n-k$, definiert wird, (vgl. Anhang, Satz 7.7.).

Wegen der Bedingung (M1) sind außerdem $\{M_p\}$ - (bzw. (M_p) -)differenzierbare Funktionen invariant unter Komposition (siehe Anhang, Satz 7.1.) und damit insbesondere auch invariant unter $\{M_p\}$ - (bzw. (M_p) -)differenzierbaren Koordinatentransformationen. Wir betrachten deshalb zu einer $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ den Raum $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) aller $\{M_p\}$ - (bzw. (M_p) -)differenzierbaren Funktionen auf M , die nun wie im C^∞ -Fall definiert werden können. Ist $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von M mit offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, so daß $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Diffeomorphismen $h_i: U_i \rightarrow V_i$ wie oben existieren, so definieren wir eine Topologie auf $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(M)$ bzw. auf $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ durch

$$(1.4) \quad \mathcal{E}^{\{M_p\}}(M) = \text{proj}_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\tilde{V}_i) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}^{(M_p)}(M) = \text{proj}_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{V}_i),$$

wobei $\tilde{V}_i \subset \mathbb{R}^k$ offen durch $\tilde{V}_i := p(V_i \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$ definiert ist, $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ sei dabei die Projektion auf die ersten k Komponenten. Die Definition der Topologie von $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(M)$ und $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ ist unabhängig von der gewählten Überdeckung $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von M und den $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Diffeomorphismen $h_i: U_i \rightarrow V_i$, (siehe Anhang, Satz 7.8., Def. 7.9. und Bem. 7.10.).

Wir bemerken, daß wegen (M3) jede reell-analytische Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ auch $\{M_p\}$ - bzw. (M_p) -differenzierbar ist, deshalb können wir $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(M)$ und $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ insbesondere für alle reell-analytischen Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ definieren.

1.1. Bem.:

Die Räume $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$ und $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sind vollständige lokal-konvexe topologische Algebren (unter punktweiser Multiplikation) und die Multiplikation ist getrennt stetig, (siehe Komatsu [29], Theorem 2.8.), außerdem haben diese Räume Zerlegung der Eins, (siehe Komatsu [29], Prop. 5.2.). Mit der obigen Definition (1.4) sind auch $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(M)$ und $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit, vollständige lokal-konvexe topologische Algebren mit getrennt stetiger Multiplikation und Zerlegung der Eins. Insbesondere ist $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ eine nukleare Fréchet-Algebra, wie mit (1.1) und (1.4) folgt.

Identifiziert man $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ mittels $z=(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \rightarrow (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, falls $z_j = x_j + ix_{j+n}$, $1 \leq j \leq n$, so erhält man durch die obige Definition auch (reelle) $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$, ebenso wie (reelle) C^∞ -Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$. Wir definieren nun (reelle) C^∞ -Untermannigfaltigkeiten M des $\mathbb{C}^n$, deren Tangentialraum $T_x(M)$ keine 'komplexen Tangenten' enthält für alle $x \in M$:

1.2. Definition :

Sei $M \in \mathbb{C}^n (\cong \mathbb{R}^{2n})$ eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit, für $x \in M$ bezeichne $T_x(M)$ den Tangentialraum von M in x , aufgefaßt als Teilraum von $\mathbb{C}^n$. Dann heißt $M \subset \mathbb{C}^n$ total-reell, wenn für alle $x \in M$ gilt:

$$(1.5) \quad T_x(M) \cap i \cdot T_x(M) = \{0\}$$

Die Bedingung (1.5) bedeutet gerade, daß $T_x(M) \subset \mathbb{C}^n$ keinen komplexen Teilraum $\neq \{0\}$ von $\mathbb{C}^n$ enthält.

1.3. Bem.:

Stellen wir eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{C}^n$ mit $\dim_{\mathbb{R}} M = k$, wobei $1 \leq k < 2n$, analog zu (1.3) und (1.3') lokal dar, d.h. für alle $x_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ von x_0 und reellwertige Funktionen

$$\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{2n-k} \in C^\infty(U) \text{ mit } M \cap U = \{x \in U \mid \mathcal{F}_1(x) = \dots = \mathcal{F}_{2n-k}(x) = 0\} \text{ und}$$

$$\text{rg } B(x) := \text{rg} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{F}_m(x) \right) \right)_{\substack{1 \leq m \leq 2n-k \\ 1 \leq j \leq 2n}} = 2n-k, \text{ so können wir die Eigen-}$$

schaft 'total-reell' genau charakterisieren: Es gilt nämlich

$$(1.6) \quad M \text{ total-reell} \iff \forall_{x \in M} \text{rg} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_j} \mathcal{F}_m(x) \right) \right)_{\substack{1 \leq m \leq 2n-k \\ 1 \leq j \leq n}} = n,$$

$$\text{hierbei sei } \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial x_{j+n}} \right), \text{ wobei } z_j = x_j + ix_{j+n} \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Zum Beweis bemerken wir, daß für $x \in M$ der Tangentialraum $T_x(M)$, aufgefaßt als (reell k -dimensionaler) Teilraum von $\mathbb{C}^n (\cong \mathbb{R}^{2n})$ die Gestalt $T_x(M) = \{ \xi \in \mathbb{R}^{2n} \mid B(x) \cdot \xi = 0 \}$ hat, die reelle $(2n-k, 2n)$ -Matrix $B(x)$ sei dabei wie oben definiert. Definieren wir für $x \in M$ die komplexe $(2n-k, n)$ -

$$\text{Matrix } A(x) := \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_j} \mathcal{F}_m(x) \right) \right)_{\substack{1 \leq m \leq 2n-k \\ 1 \leq j \leq n}}, \text{ so folgt aus der Annahme}$$

$\operatorname{rg} A(x) < n$ für ein $x \in M$, daß ein $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \neq 0$, mit $A(x) \cdot \zeta = 0$ existiert. Schreiben wir $\zeta_j = \xi_j + i\xi_{j+n}$ für $1 \leq j \leq n$, so rechnet man sofort nach, daß mit $\tilde{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_n, -\xi_{n+1}, \dots, -\xi_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} (\cong \mathbb{C}^n)$ gilt $B(x) \cdot \tilde{\xi} = 0$ und $B(x) \cdot (-i\tilde{\xi}) = 0$, wobei $-i\tilde{\xi} = -(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n}, \xi_1, \dots, \xi_n)$, d.h. $\tilde{\xi} \in T_x(M)$ und $(-i\tilde{\xi}) \in T_x(M)$, also $\tilde{\xi} \in T_x(M) \cap i \cdot T_x(M)$ und $\tilde{\xi} \neq 0$. Ist umgekehrt $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} (\cong \mathbb{C}^n)$, $\zeta \neq 0$, $\zeta \in T_x(M) \cap i \cdot T_x(M)$ für ein $x \in M$, dann erfüllt $\tilde{\zeta} := (\xi_1, \dots, \xi_n, -\xi_{n+1}, \dots, -\xi_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} (\cong \mathbb{C}^n)$ die Gleichung $A(x) \cdot \tilde{\zeta} = 0$, $\tilde{\zeta} \neq 0$, d.h. $\operatorname{rg} A(x) < n$. Damit ist (1.6) bewiesen.

Aus der Charakterisierung (1.6) können wir sofort einige Folgerungen ziehen und Beispiele für total-reelle C^∞ - bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$ -Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$ angeben:

1.4. Bem. und Beispiele:

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine (reelle) C^∞ -Untermannigfaltigkeit, dann gilt:

- i) $\dim_{\mathbb{R}} M = 1 \Rightarrow M$ total-reell
- ii) M total-reell $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} M \leq n$
- iii) Sei $N \subset \mathbb{C}^m$ eine reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit und M, N total-reell, dann ist auch $M \times N \subset \mathbb{C}^{n+m}$ total-reell.

Wir kommen nun zu konkreten Beispielen total-reeller Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$:

- iv) Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine C^∞ - (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$ -) Kurve in $\mathbb{C}^n$, d.h. $M = f(\mathbb{R})$, wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ Homöomorphismus und mit $f = (f_1, \dots, f_n)$ gilt, daß $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(\mathbb{R})$), $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$; oder $M = \overline{f}(S^1)$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\overline{f}: S^1 \rightarrow M$ Homöomorphismus und $f(t) := \overline{f}(\exp(it))$ sonst wie oben. Dann ist M total-reell, da $\dim_{\mathbb{R}} M = 1$. Man vergleiche auch Anhang, Satz 7.6..

- v) Das Produkt von C^∞ -Kurven $M_1, \dots, M_n \subset \mathbb{C}$, also $M_1 \times \dots \times M_n \subset \mathbb{C}^n$ ist total-reell nach iii) und iv), so ist z.B. der n -Torus $T^n := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ eine total-reelle, reell-analytische Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$.

- vi) Sei $M \subset \mathbb{C}^2$ das Ellipsoid $M := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid ax_1^2 + by_1^2 + cx_2^2 - 1 = 0, y_2 = 0\}$

wobei $z_j = x_j + iy_j$ für $j=1, 2$, und $a>0, b>0, c>0$. Anwendung von (1.6)

zeigt sofort, daß die Total-reell-Bedingung genau für die Punkte $z \in K_0 := \{(0, 1/\sqrt{c}), (0, -1/\sqrt{c})\}$ verletzt ist, d.h. $M \setminus K_0$ ist eine total-reelle Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^2$. Als Spezialfall ist mit $S^2 := \{z=(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|=1, \operatorname{Im} z_2 = 0\}$ und $K_0 := \{(0, 1), (0, -1)\}$ $S^2 \setminus K_0$ eine total-reelle Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^2$.

vii) Sei $M_1 \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch $M_1 := \{z=(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid (|z_1|-2)^2 + x_2^2 - 1 = 0, y_2 = 0\}$, wobei $z_j = x_j + iy_j$ für $j=1, 2$, dann zeigt die Anwendung von (1.6), daß die Total-reell-Bedingung genau für die Punkte $z=(z_1, z_2) \in M_1$ mit $x_2^2 = 1$ verletzt ist. Sei also $K_0 := \{z \in M_1 \mid (\operatorname{Re} z_2)^2 = 1\}$, dann ist $M_1 \setminus K_0$ total-reell.

Sei nun $M_2 := \{z=(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid ((y_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 2)^2 + x_1^2 - 1 = 0, y_2 = 0\}$, so ist M_2 kongruent zu M_1 , die Total-reell-Bedingung ist diesmal jedoch genau für die vier Punkte $z \in \tilde{K}_0 := \{(0, 1), (0, 3), (0, -1), (0, -3)\}$ verletzt, d.h. $M_2 \setminus \tilde{K}_0$ ist total-reell. Dies zeigt, daß die Eigenschaft 'total-reell' wesentlich von der Einbettung einer Mannigfaltigkeit in den $\mathbb{C}^n$ abhängt, vgl. hierzu auch Wells [58], Abschnitt 3.

viii) Eine weitere Möglichkeit, Beispiele total-reeller C^∞ -Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{C}^n$ anzugeben, wird von Čirka [11], S.95f, ausgeführt: Sei $D \subset \mathbb{C}^m$ ein Gebiet, $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(D)$ und $M := \{(f_1(z), \dots, f_n(z)) \mid z \in D\}$.

Die $(n, 2m)$ -Matrix $\left(\left(\frac{\partial f_\ell(z)}{\partial z_j}, \frac{\partial f_\ell(z)}{\partial \bar{z}_j} \right) \right)_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ habe Rang $2m$ für alle $z \in D$,

dann ist $M \subset \mathbb{C}^n$ total-reell.

Analoges gilt für den $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Fall, vgl. die Charakterisierung in Anhang, Satz 7.6. .

Wir kommen nun zu der lokalen Version des Fortsetzungssatzes:

1.5. Satz :

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit und $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$, dann gilt: Zu jedem $x_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ von x_0 und ein $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ mit

$$(1.7) \quad F|_{M \cap U} = f|_{M \cap U}$$

$$(1.8) \quad D^\alpha \bar{\partial} F(z) = 0 \quad \forall \quad z \in M \cap U, \quad \alpha \in \mathbb{N}^{2n}$$

Bew.:

Sei $k := \dim_{\mathbb{R}} M$, es gilt $k \leq n$, da M total-reell. Es sei $x_0 \in M$ beliebig aber fest, dann existiert eine offene Umgebung U_1 von x_0 in $\mathbb{C}^n$ und reellwertige $\mathcal{E}^{(M,p)}$ -Funktionen $\rho_1, \dots, \rho_{2n-k}$ auf U_1 , so daß

$$(1.9) \quad M \cap U_1 = \{ z \in U_1 \mid \rho_1(z) = \dots = \rho_{2n-k}(z) = 0 \}.$$

Sei $f \in \mathcal{E}^{(M,p)}(M)$, so kann $f|_{M \cap U_1}$ zu einer $\mathcal{E}^{(M,p)}$ -Funktion auf U_1 fortgesetzt werden, (vgl. Anhang, Satz 7.8., Def. 7.9.), diese Fortsetzung werde im folgenden ebenfalls mit f bezeichnet. Da M total-reell, folgt aus der Aussage (1.6): Zu $x_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung $U_2 \subset U_1$ und Zahlen $v_1, \dots, v_n \in \{1, \dots, 2n-k\}$, so daß die n Vektoren

$$\left(\frac{\partial \rho_{v_j}}{\partial \bar{z}_1} | x, \dots, \frac{\partial \rho_{v_j}}{\partial \bar{z}_n} | x \right), \quad 1 \leq j \leq n, \quad \text{für alle } x \in U_2 \text{ eine Basis des } \mathbb{C}^n \text{ bilden.}$$

Eine Umnummerierung von $\rho_{v_1}, \dots, \rho_{v_n}$ in $\rho_1, \dots, \rho_n$ ergibt, daß die Matrix $A(x) := \left(\left(\frac{\partial \rho_j}{\partial \bar{z}_i} | x \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in U_2$ regulär ist.

Sei nun $b_0(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} | x, \dots, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} | x \right)$, so löse das lineare (n, n) -Gleichungssystem

$$(1.10) \quad A(x) \cdot h(x) = b_0(x) \quad \text{für die Unbekannten } h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x)),$$

$x \in U_2$. Dies bedeutet gerade, daß $\bar{\partial} f = \sum_{j=1}^n h_j \cdot \bar{\partial} \rho_j$ auf U_2 .

Setze nun

$$(1.11) \quad f_1 := f - \sum_{j=1}^n h_j \cdot \rho_j, \quad \text{dann ist } f_1|_{M \cap U} = f|_{M \cap U} \quad \text{und} \quad \bar{\partial} f_1 = - \sum_{j=1}^n \bar{\partial} h_j \cdot \rho_j.$$

Sei I ein Multiindex natürlicher Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$, falls I ein m -Tupel, $m \in \mathbb{N}_+$, so schreibe $\|I\| := m$. Wir definieren nun induktiv Funktionen h_{Ij} , $1 \leq j \leq n$, durch Lösung des Gleichungssystems

$$(1.12) \quad A(x) \cdot h_I(x) = b_I(x), \quad x \in U_2, \quad \text{für die Unbekannten } h_I(x) := (h_{I1}(x), \dots, h_{In}(x));$$

die rechte Seite sei $b_I(x) := \left(\frac{\partial h_I}{\partial \bar{z}_1} | x, \dots, \frac{\partial h_I}{\partial \bar{z}_n} | x \right)$.

Dies bedeutet gerade, daß $\bar{\partial} h_I = \sum_{j=1}^n h_{Ij} \cdot \bar{\partial} \rho_j$.

Definiere nun induktiv für $m \in \mathbb{N}_+$:

$$(1.13) \quad f_m := f_{m-1} + \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\|I\|=m} h_I \cdot \rho_I, \quad \text{wobei } f_0 := f, \quad I = (\beta_1, \dots, \beta_m),$$

$1 \leq \beta_i \leq n$ und $\mathcal{P}_I := \mathcal{P}_{\beta_1} \cdot \dots \cdot \mathcal{P}_{\beta_m}$. Es folgt nun aus (1.12) und (1.13), vgl. Wermer [59], S. 117 und Nirenberg/Wells [36], §3 :

$$(1.14) \quad \bar{\partial} f_m = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{||I||=m} \bar{\partial} h_I \cdot \mathcal{P}_I \quad \forall m \in \mathbb{N}_+.$$

Wir bemerken nun, daß für $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ mit $|\alpha| < m$ gilt, daß

$$(1.15) \quad D^\alpha (f_m - f_{m-1})(z) = 0 \quad \forall z \in M \cap U_2, \text{ wobei } m \in \mathbb{N}_+ \text{ und } f_0 = f.$$

Es gilt nämlich für $z \in M \cap U_2$: $D^\alpha (f_m - f_{m-1})(z) =$

$$\frac{(-1)^m}{m!} \sum_{||I||=m} D^\alpha (h_I \cdot \mathcal{P}_I)(z) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{||I||=m} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} h_I(z) D^\beta \mathcal{P}_I(z) = 0,$$

da für $|\beta| < m$ gilt, daß $D^\beta \mathcal{P}_I(z) = 0$ für $z \in M \cap U_2$. Hierbei ist

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \binom{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} \text{ für } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{2n}).$$

Wir wählen nun eine beschränkte offene Umgebung $U \subset \bar{U} \subset U_2$ von x_0 mit $M \cap U \subset \overline{M \cap U} \subset M \cap U_2$ und definieren das Feld $(D^\alpha \bar{f})_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}}$ auf $\overline{M \cap U}$ durch

$$(1.16) \quad D^\alpha \bar{f}(z) := D^\alpha f|_{\alpha}|(z), \quad z \in \overline{M \cap U}, \text{ wobei nach obiger Bemerkung}$$

$$D^\alpha f|_{\alpha}|(z) = D^\alpha f|_{\alpha|+j}, \quad j \in \mathbb{N}_+.$$

Wir behaupten, daß $(D^\alpha \bar{f})_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}}$ ein Whitney-Feld (vgl. Malgrange [35], I.1.) definiert. Hierzu ist zu zeigen, daß für $x, y \in \overline{M \cap U}$ gilt, daß

$$(1.17) \quad \forall_{m \in \mathbb{N}} \quad \forall_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{2n} \\ |\alpha| \leq m}} \quad D^\alpha \bar{f}(x) - \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} \frac{D^{\alpha+\beta} \bar{f}(y)}{\beta!} (x-y)^\beta = o(|x-y|^{m-|\alpha|}),$$

falls $|x-y| \rightarrow 0$.

Nun ist aber $(D^\alpha \bar{f})|_{|\alpha| \leq m} = (D^\alpha f_m)|_{|\alpha| \leq m}$ nach (1.16), damit folgt (1.17)

unmittelbar aus der Taylorformel für $D^\alpha f_m$.

In dem folgenden Lemma zeigen wir nun, daß außerdem gilt:

$$(1.18) \quad \sup_{z \in \overline{M \cap U}} |D^\alpha \bar{f}(z)| \leq C_{\bar{h}} \cdot \bar{h}^{|\alpha|} \quad \forall_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}} \text{ für geeignetes } \bar{h} > 0, \\ C_{\bar{h}} > 0.$$

Aus Komatsu [30], Theorem 4.5. folgt hieraus (für die Untermannigfaltigkeit $M \cap U$) :

Es existiert $F \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U)$ mit $D^\alpha \bar{f}|_{M \cap U} = D^\alpha F|_{M \cap U}$, insbesondere also $f|_{M \cap U} = F|_{M \cap U}$. Es gilt nun, daß

$$(1.19) \quad D^\alpha \bar{\partial} F(z) = 0 \quad \forall z \in M \cap U, \quad \alpha \in \mathbb{N}^{2n}.$$

Sei dazu $j \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$ für $z_j = x_j + iy_j$ und e_m der m -te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^{2n}$, dann folgt für $z \in M \cap U$:

$$\begin{aligned} D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(z) &= \frac{1}{2} D^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) F(z) = \frac{1}{2} (D^{\alpha+e_j} F(z) + i D^{\alpha+e_j+n} F(z)) = \\ &= \frac{1}{2} (D^{\alpha+e_j} \bar{f}(z) + i D^{\alpha+e_j+n} \bar{f}(z)) = \frac{1}{2} (D^{\alpha+e_j} f|_{|\alpha|+1} + i D^{\alpha+e_j+n} f|_{|\alpha|+1}(z)) \\ &= D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f|_{|\alpha|+1}(z) = \frac{(-1)^{|\alpha|+1}}{(|\alpha|+1)!} \sum_{||I||=|\alpha|+1} \eta^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} h_I \cdot \mathcal{P}_I \right)(z) = 0, \text{ da} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$D^\beta \mathcal{P}_I(z) = 0$ für $z \in M \cap U$ und $\beta \leq \alpha$, denn $||I|| = |\alpha|+1$. Der Satz ist also bewiesen, wenn (1.18) bewiesen ist. Dies geschieht in dem folgenden

1.6. Lemma :

Es gilt (1.18), d.h. mit Definition (1.16) gilt, daß

$$\sup_{z \in M \cap U} |D^\alpha f|_{|\alpha|}(z)| \leq C_{\bar{h}} \cdot \bar{h}^{|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n} \text{ für geeignetes } \bar{h} > 0$$

und $C_{\bar{h}} > 0$.

Bew.:

Bezeichne wie im Beweis zu Satz 1.5. $A(x) := \left(\left(\frac{\partial \mathcal{P}_j(x)}{\partial \bar{z}_i} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$, wo-

bei $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ reell-wertige Funktionen aus $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(U_1)$, $x \in U_2 \subset U_1$, es

$$\text{ist } \det A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(1)}} \mathcal{P}_1(x) \cdot \dots \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(n)}} \mathcal{P}_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{U},$$

da $\bar{U} \subset U_2$ und $A(x)$ regulär auf U_2 .

Hierbei sei s_n die Permutationsgruppe von $\{1, \dots, n\}$ und $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ das Vorzeichen von $\sigma \in s_n$.

Da $\det A(x)$ ein Polynom von $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \mathcal{P}_j(x)$, $1 \leq i, j \leq n$, folgt, daß

$\det A(x) \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U_2)$ und damit auch

(1.20) $g(x) := 1/\det A(x) \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U_2)$, da M_p ($\tilde{M}_1$) erfüllt, vgl. An-

hang, Korollar 7.2. .

Nach der Cramerschen Regel gilt für die Lösung des Gleichungssystems (1.12), daß

(1.21) $h_{Ij}(x) = g(x) \det A_{Ij}(x)$, wobei $A_{Ij}(x)$ aus $A(x)$ mittels

Ersetzen der j -ten Spalte durch $b_I(x) = (\frac{\partial h_I}{\partial z_1}|_x, \dots, \frac{\partial h_I}{\partial z_n}|_x)^T$ hervor-

geht, wobei $x \in U_2$, $1 \leq j \leq n$, $I = (\beta_1, \dots, \beta_r)$, $r \in \mathbb{N}_+$ (für $\|I\| = 0$ sei $b_I = b_0$) .

Es gelte nun

$$(1.22) \quad \|f\|_{M_p, \bar{h}, \overline{M \cap U}}^1 := \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{h}^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{x \in \overline{M \cap U}} |D^\alpha f(x)| \leq C_{\bar{h}} \quad \text{wobei}$$

$f \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(M)$ wie in Satz 1.5. gegeben, sowie

$$\|g\|_{M_p, \bar{h}, \overline{M \cap U}}^1 \leq L_{\bar{h}}, \quad g \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U_2) \quad \text{wie in (1.20) und } \|\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\|_{M_p, \bar{h}, \overline{M \cap U}}^1 \leq \bar{C}_{\bar{h}}$$

für $1 \leq i, j \leq n$ und ein $\bar{h} > 0$.

Wir behaupten nun, daß für $\|I\| = r$, $r \in \mathbb{N}_+$, und $x \in \overline{M \cap U}$ gilt :

$$(1.23) \quad \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{h}^{|\alpha|+r} M_{|\alpha|+r}} |D^\alpha h_I(x)| \leq C_{\bar{h}} \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^r, \quad \text{wobei}$$

$$\tilde{C}_{\bar{h}} := n! \cdot M_0^n \cdot L_{\bar{h}} \cdot \bar{C}_{\bar{h}}^{n-1} > 0 .$$

Wir bemerken zunächst, daß für $w \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U_2)$ mit $\|w\|_{M_p, \bar{h}, \overline{M \cap U}}^1 \leq L$ und

$$v_m \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U_2) \quad \text{mit} \quad \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{h}^{|\alpha|+m} M_{|\alpha|+m}} |D^\alpha v_m(x)| \leq K_m, \quad \text{für } m \in \mathbb{N}, L > 0,$$

$K_m > 0$, für $x \in \overline{M \cap U}$ folgt :

$$(1.24) \quad \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{h}^{|\alpha|+m} M_{|\alpha|+m}} |D^\alpha (w \cdot v_m)(x)| \leq K_m L M_0, \quad \text{denn mit } M_p' := \bar{h}^p M_p$$

folgt :

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{h}^{|\alpha|+m} M_{|\alpha|+m}} |D^\alpha (w \cdot v_m)(x)| = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{M_{|\alpha|+m}} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} v_m(x) D^\beta w(x) \leq$$

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{|\alpha|}{|\beta|} \frac{1}{M_{|\alpha|+m}} |D^{\alpha-\beta} v_m(x)| |D^{\beta} w(x)| \leq$$

$$M_0 \cdot \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{|D^{\alpha-\beta} v_m(x)|}{M_{|\alpha|-|\beta|+m}} \frac{|D^{\beta} w(x)|}{M_{|\beta|}}, \text{ denn } M_p' \text{ erfüllt } (\tilde{M}1) \text{ und daher}$$

gilt $\binom{|\alpha|}{|\beta|} M_{|\alpha|+m}' \cdot M_{|\beta|}' \leq M_0' \cdot M_{|\alpha|+m}'$, woraus folgt, daß

$$\binom{|\alpha|}{|\beta|} M_{|\alpha|+m}' \cdot M_{|\beta|}' \leq M_0' \cdot M_{|\alpha|+m}' ; \text{ damit gilt die letzte Ungleichung.}$$

Es folgt

$$M_0 \cdot \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{|D^{\alpha-\beta} v_m(x)|}{M_{|\alpha|-|\beta|+m}} \frac{|D^{\beta} w(x)|}{M_{|\beta|}} = M_0 \cdot \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \frac{|D^{\alpha} v_m(x)|}{M_{|\alpha|+m}} \frac{|D^{\beta} w(x)|}{M_{|\beta|}} =$$

$$M_0 \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{|D^{\alpha} v_m(x)|}{M_{|\alpha|+m}} \right) \left(\sum_{|\beta|=0}^{\infty} \frac{|D^{\beta} w(x)|}{M_{|\beta|}} \right) \leq M_0 \cdot K_m \cdot L \text{ und damit (1.24).}$$

Nun können wir (1.23) mit vollständiger Induktion nach $r \in \mathbb{N}_+$ zeigen:

$$r=1 : \text{Zeige, daß } \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+1}} \frac{1}{M_{|\alpha|+1}} |D^{\alpha} h_j(x)| \leq C_h \cdot \tilde{C}_h \text{ für } j=1, \dots, n$$

und $x \in \overline{M \cap U}$. Nach (1.21) gilt :

$$(1.25) \quad \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+1}} \frac{1}{M_{|\alpha|+1}} |D^{\alpha} h_j(x)| = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+1}} \frac{1}{M_{|\alpha|+1}} |D^{\alpha} (g \cdot \det A_j)(x)|$$

$$\leq n! \cdot C_h \cdot L_h \cdot \tilde{C}_h^{n-1} \cdot M_0^n = C_h \cdot \tilde{C}_h, \quad ,$$

die Ungleichung folgt wegen $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+1}} \frac{1}{M_{|\alpha|+1}} |D^{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \right)(x)| \leq C_h$ durch

n -maliges Anwenden von (1.24) (auf g und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(\ell)}} \varphi_{\ell}$, $\ell \neq j$ sowie auf $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_{\sigma(j)}}$ mit $m=1$) .

$r \rightarrow r+1$:

$$\text{Gelte bereits für } ||I||=r, \text{ daß } \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+r}} \frac{1}{M_{|\alpha|+r}} |D^{\alpha} h_I(x)| =$$

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+r}} \frac{1}{M_{|\alpha|+r}} |D^{\alpha} (g \cdot \det A_I)(x)| \leq C_h \cdot \tilde{C}_h^r \text{ für alle } x \in \overline{M \cap U} .$$

Dann folgt für $j=1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+r+1} M_{|\alpha|+r+1}} |D^\alpha h_{Ij}(x)| &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+r+1} M_{|\alpha|+r+1}} D^\alpha (g \cdot \det A_{Ij}(x))' = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{h^{|\alpha|+r+1} M_{|\alpha|+r+1}} |D^\alpha (\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot g \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(1)}} \varphi_1 \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(j-1)}} \varphi_{j-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(j)}} h_I \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(j+1)}} \varphi_{j+1} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(n)}} \varphi_n) (x) | \leq \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{h^{|\alpha|+r+1} M_{|\alpha|+r+1}} |D^\alpha ((g \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(1)}} \varphi_1 \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(j-1)}} \varphi_{j-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(j+1)}} \varphi_{j+1} \cdot \\ &\quad \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(n)}} \varphi_n) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(j)}} h_I) (x) | \leq \end{aligned}$$

$n! \cdot (C_{\bar{h}} \tilde{C}_{\bar{h}}^r) \cdot L_{\bar{h}} \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^{n-1} \cdot M_0^n = C_{\bar{h}} \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^r \cdot \tilde{C}_{\bar{h}} = C_{\bar{h}} \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^{r+1}$, die letzte Ungleichung folgt wieder durch Anwendung von (1.24) auf g und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(j)}} \varphi_j$, $j \neq j$, sowie $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\sigma(j)}} h_I$ für $m=r+1$ mittels der Induktionsvoraussetzung.

Damit ist (1.23) gezeigt. Es gilt also für $x \in \overline{M \cap U}$ und $||I|| = r$:

$$(1.26) \quad |D^\alpha h_I(x)| \leq C_{\bar{h}} \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^r \cdot h^{|\alpha|+r} M_{|\alpha|+r}.$$

Wir wollen nun für $x \in \overline{M \cap U}$ und $||I|| = r$, $I = (\beta_1, \dots, \beta_r)$, $1 \leq \beta_i \leq n$,

$|D^\alpha \varphi_I(x)|$ abschätzen, wobei $\varphi_I = \varphi_{\beta_1} \cdots \varphi_{\beta_r}$ definiert war.

Sei also $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, $r \leq |\alpha|$, dann gilt (mit $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_{2n}!$ für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$) :

$$\begin{aligned} (1.27) \quad D^\alpha \varphi_I(x) &= \alpha! \sum_{\substack{a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}^{2n} \\ a_1 + \dots + a_r = \alpha}} \frac{D^{a_1} \varphi_{\beta_1}(x)}{a_1!} \cdots \frac{D^{a_r} \varphi_{\beta_r}(x)}{a_r!} \\ &= \alpha! \sum_{\substack{a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}^{2n \setminus \{0\}} \\ a_1 + \dots + a_r = \alpha}} \frac{D^{a_1} \varphi_{\beta_1}(x)}{a_1!} \cdots \frac{D^{a_r} \varphi_{\beta_r}(x)}{a_r!} \end{aligned}$$

da $\mathcal{P}_{\beta_1}(x) = \dots = \mathcal{P}_{\beta_r}(x) = 0$ für $x \in \overline{M \cap U}$. Gelte nun für $1 \leq j \leq n$, daß

$$(1.28) \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}} \frac{1}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{x \in \overline{M \cap U}} |D^\alpha \mathcal{P}_j(x)| \leq 1 \quad \text{für geeignetes } h > 0 \Rightarrow$$

$$(1.29) \quad \frac{(|\alpha| - r + 1)!}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha| - r + 1}} |D^\alpha \mathcal{P}_I(x)| \leq |\alpha|! \cdot M_1^{r-1} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\} \\ a_1 + \dots + a_r = \alpha}} \frac{|a_1|! |D^{a_1} \mathcal{P}_{\beta_1}(x)|}{a_1! h^{|a_1|} M_{|a_1|}} \dots \frac{|a_r|! |D^{a_r} \mathcal{P}_{\beta_r}(x)|}{a_r! h^{|a_r|} M_{|a_r|}},$$

da wegen (M1) gilt :

$$\frac{M_{|a_1|}}{|a_1|!} \cdot \frac{M_{|a_2|}}{|a_2|!} \leq M_1 \frac{M_{|a_1| + |a_2| - 1}}{(|a_1| + |a_2| - 1)!} \quad \text{und damit sukzessiv}$$

$$(1.30) \quad \frac{M_{|a_1|}}{|a_1|!} \dots \frac{M_{|a_r|}}{|a_r|!} \leq M_1^{r-1} \cdot \frac{M_{|\alpha| - r + 1}}{(|\alpha| - r + 1)!} \quad \text{für } a_1 + \dots + a_r = \alpha,$$

$$|a_1|, \dots, |a_r| \geq 1.$$

Da außerdem für $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ gilt, daß $|\alpha|! \leq H^{|\alpha|} \cdot \alpha!$ für $H := 2^{2n-1}$, und damit $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \leq H^{|\alpha|}$, folgt aus (1.29) und (1.28), daß

$$(1.31) \quad \frac{(|\alpha| - r + 1)!}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha| - r + 1}} |D^\alpha \mathcal{P}_I(x)| \leq |\alpha|! \cdot H^{|\alpha|} \cdot M_1^{r-1}.$$

Nun sind wir in der Lage, $|D^\alpha \bar{f}(x)| = |D^\alpha f|_{|\alpha|}(x)|$ für $x \in \overline{M \cap U}$ abzuschätzen, es folgt nämlich für $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, $x \in U_2$, aus (1.13), daß

$$(1.32) \quad f|_{|\alpha|}(x) = f(x) + \sum_{r=1}^{|\alpha|} \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{\|I\|=r} h_I(x) \cdot \mathcal{P}_I(x), \quad \text{wobei } f \text{ auch}$$

die $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Fortsetzung von f auf $U_1 \supset U_2 \supset \overline{M \cap U}$ bezeichne, vgl. Bew. Satz 1.5. . Damit folgt für $x \in \overline{M \cap U}$:

$$(1.33) \quad |D^\alpha f|_{|\alpha|}(x) \leq |D^\alpha f(x)| + \sum_{r=1}^{|\alpha|} \sum_{\|I\|=r} \frac{1}{r!} |D^\alpha (h_I \cdot \mathcal{P}_I)(x)| \leq$$

$$|D^\alpha f(x)| + \sum_{r=1}^{|\alpha|} \sum_{\|I\|=r} \sum_{\substack{q \leq \alpha \\ |q| \geq r}} \frac{|\alpha|!}{r!} \frac{|D^{\alpha-q} h_I(x)|}{|(\alpha-q)|!} \frac{|D^q \mathcal{P}_I(x)|}{|q|!} \leq$$

$$|D^\alpha f(x)| + 2 \cdot |\alpha| \sum_{r=1}^{|\alpha|} \sum_{||I||=r} \sum_{\substack{q \leq \alpha \\ |q| \geq r}} |x|! \frac{|D^{x-q} h_I(x)|}{(|\alpha| - q + r)!} \frac{|D^q \mathcal{P}_I(x)|}{|q|!}$$

Aus (1.26) und (1.31) folgt nun zusammen mit (1.33) (und $\text{oBdA } \tilde{C}_H \gg 1$, $\bar{h} \gg 1$) :

$$(1.34) \quad |D^\alpha f|_{|\alpha|}(x) \leq |D^\alpha f(x)| +$$

$$C_H \cdot |\alpha|! \cdot (2 \tilde{C}_H H)^{|\alpha|} \sum_{r=1}^{|\alpha|} \sum_{||I||=r} \sum_{\substack{q \leq \alpha \\ |q| \geq r}} M_1^{r-1} \frac{\bar{h}^{|\alpha|-|q|+r} M_{|\alpha|-q+r}}{(|\alpha|-|q|+r)!} \frac{\bar{h}^{|q|} M_{|q|, -r+1}}{(|q|-r+1)!} \leq$$

$$|D^\alpha f(x)| + C_H \cdot |\alpha|! \cdot C_1^{|\alpha|} \sum_{r=1}^{|\alpha|} \sum_{||I||=r} \sum_{\substack{q \leq \alpha \\ |q| \geq r}} \bar{h}^{|\alpha|+r} \cdot M_1^r \cdot \frac{M_{|\alpha|}}{|\alpha|!} \leq$$

$$|D^\alpha f(x)| + C_H \cdot (C_2 \bar{h}^2)^{|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|} \cdot |\alpha| \cdot n^{|\alpha|} \cdot |\alpha|^{2n} \leq$$

$$|D^\alpha f(x)| + C_H \cdot (C_3 \bar{h}^2)^{|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|} \leq \tilde{C} \cdot \tilde{h}^{|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|},$$

da $|D^\alpha f(x)| \leq C_H \cdot \bar{h}^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$ für $x \in \overline{M \cap U}$ nach (1.22). Damit ist

Lemma 1.6., also (1.18) gezeigt und damit Satz 1.5. qed.

1.7. Zusatz (zu Satz 1.5.):

Satz 1.5. gilt auch für $\mathcal{E}^{(M_p)}$ anstelle von $\mathcal{E}^{(M_p)}$, wie man folgendermaßen sieht: Seien $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U_2)$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, M_p erfülle ($\tilde{M}1$) und (M3). Sei $K \subset U_2$ kompakt, dann existiert eine Folge N_p , die ($\tilde{M}1$)

erfüllt und für die gilt, daß $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{N_p}{M_p} \right)^{1/p} = 0$ sowie

$\sup_{x \in K} |D^\alpha f_j(x)| \leq C \cdot N_{|\alpha|}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $j=1, \dots, k$. Den Beweis hier-

zu findet man im Anhang, Lemma 7.4. . Wendet man dies auf die Funktionen f , g und $\mathcal{P}_j$, $j=1, \dots, n$, sowie $\frac{\partial \mathcal{P}_j}{\partial \bar{z}_i}$, $1 \leq i, j \leq n$, und $K := \overline{M \cap U}$ an,

so folgt mit dem Beweis von Lemma 1.6., daß $\sup_{x \in \overline{M \cap U}} |D^\alpha f|_{|\alpha|}(x) \leq \tilde{C} \cdot \tilde{h}^{|\alpha|} \cdot N_{|\alpha|}$.

für geeignetes $\tilde{C} > 0$, $\tilde{h} > 0$, da N_p die Bedingung $(\tilde{M}_1)$ erfüllt. Wegen

$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{N_p}{M_p} \right)^{1/p} = 0$ folgt damit auch, daß für alle $\tilde{h} > 0$ ein $C > 0$ existiert,

so daß $\sup_{x \in M \cap U} |D^\alpha f|_{|\alpha|}(x) \leq C \tilde{h}^{|\alpha|} |f|_{M_{|\alpha|}}$ für $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$. Der Beweis von

Satz 1.5. kann nun völlig analog auf den $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Fall übertragen werden.

1.8. Bem.:

Ohne Benutzung von Lemma 1.6. zeigt der Beweis von Satz 1.5. insbesondere für $f \in C^\infty(M)$, M total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$, die Aussagen (1.7) und (1.8) für ein $F \in C^\infty(U)$ und zwar unter Verwendung des bekannten Whitneyschen Fortsetzungssatzes, den man etwa bei Malgrange [35], I.4. findet. Im C^r -Fall, $1 \leq r < \infty$, wurde Satz 1.5. von Nirenberg/Wells [36] bewiesen, vgl. auch Wermer [59], 17.4. .

1.9. Bem.:

Falls für $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) aus Satz 1.5. gilt, daß $\text{supp}(f|_{M \cap U})$ kompakt und $\text{supp}(f|_{M \cap U}) \subset \tilde{U} \subset U$, $\tilde{U} \subset \mathbb{C}^n$ offen, so kann auch $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$) mit (1.7) und (1.8) gefunden werden, so daß $\text{supp}(F) \subset \tilde{U}$. Hat also $f|_{M \cap U}$ kompakten Support in $M \cap U$, so kann auch F mit (1.7) und (1.8) so gewählt werden, daß F kompakten Support in U hat.

Bew.:

Sei also $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) mit $\text{supp}(f|_{M \cap U}) \subset U_1 \subset \tilde{U}_1 \subset \tilde{U}$ gegeben, dann wähle zunächst beliebige Fortsetzung $\tilde{f} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$) von $f|_{M \cap U}$ so, daß $\text{supp} \tilde{f} \subset U_1$ kompakt. Nimmt man $\tilde{f}$ als Ausgangsfunktion für die Konstruktion im Beweis von Satz 1.5., so folgt für die resultierende Funktion $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$), daß zusätzlich zu (1.7) und (1.8) gilt

$$(1.35) \quad D^\alpha F(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M \cap (U \setminus U_1), \alpha \in \mathbb{N}^{2n}.$$

Sei nun $\chi \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ eine Funktion mit $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $x \in U$, $\chi \equiv 1$ auf U_1 und $\text{supp} \chi \subset \tilde{U}$. Dann gilt mit $\tilde{F} := \chi \cdot F$, daß $\tilde{F} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$), $(\text{supp} \tilde{F}) \subset \tilde{U}$ und außerdem gilt für $x \in M \cap U$:

$$(1.36) \quad \tilde{F}(x) = \chi(x) \cdot F(x) = \chi(x) \cdot f(x) = f(x) \quad ,$$

sowie für $j=1, \dots, n$

$$D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \tilde{F}(x) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \left(\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \chi \cdot D^\beta F \right) (x) =$$

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[D^{\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \chi \cdot D^\beta F + D^{\alpha-\beta} \chi \cdot D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F \right] (x) \stackrel{(1.8)}{=} (1.8)$$

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \chi(x) \cdot D^\beta F(x) = 0 \quad , \quad \text{da} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \chi \equiv 0 \quad \text{auf } U_1 \quad \text{und wegen (1.35).}$$

qed.

1.10. Korollar :

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit und es sei $K \subset M$ kompakt, dann gilt :

Zu $f \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) existiert ein $F \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$) mit

$$(1.7') \quad F|_K = f|_K$$

$$(1.8') \quad D^\alpha \bar{\partial} F(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in K \quad \text{und } \alpha \in \mathbb{N}^{2n} \quad .$$

Bew.:

Sei $x_0 \in K$, so kann eine offene Umgebung $U(x_0) \subset \mathbb{C}^n$ wie in Satz 1.5. gefunden werden, so daß insbesondere f auf $U(x_0)$ fortsetzbar und die Matrix

$$A(x) := \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_i} (x) \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{ist regulär für } x \in U(x_0), \text{ vgl. Bew.}$$

Satz 1.5. . Da $K \subset M$ kompakt, wird K von endlich vielen solcher Umgebungen $U(x_0)$ überdeckt, etwa von $U_1, \dots, U_m$. Sei $\chi_1, \dots, \chi_m \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$

eine Zerlegung der Eins auf K bzgl. der $U_1, \dots, U_m$, d.h. $0 \leq \chi_i(x) \leq 1$,

$x \in \mathbb{C}^n$, $\text{supp } \chi_i \subset U_i$, $i=1, \dots, m$, und $\sum_{i=1}^m \chi_i \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von K .

Wende nun die Konstruktion von Bew. Satz 1.5. auf $\chi_i \cdot f$,

$i=1, \dots, m$, anstelle von f an, man erhält so Funktionen $F_i \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U_i)$

(bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U_i)$), $i=1, \dots, m$, mit

$$(1.37) \quad F_i|_{M \cap U_i} = \chi_i \cdot f|_{M \cap U_i}$$

$$(1.38) \quad D^\alpha \bar{\partial} F_i(x) = 0 \quad \text{für } x \in M \cap U_i, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \quad i=1, \dots, m.$$

Da $\text{supp}(\chi_i \cdot f) \subset U_i$, kann nach Bem. 1.9. auch F_i mit $\text{supp } F_i$ kompakt und $\text{supp } F_i \subset U_i$ gewählt werden, also kann F_i durch 0 außerhalb von U_i auf ganz $\mathbb{C}^n$ fortgesetzt werden für $i=1, \dots, m$. Definiere nun $F(z) :=$

$$\sum_{i=1}^m F_i(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n, \text{ dann gilt } F \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\mathbb{C}^n) \text{ (bzw. } \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n) \text{)}$$

und für $x \in K$ gilt:

$$F(x) = \sum_{i=1}^m F_i(x) \stackrel{(1.37)}{=} \sum_{i=1}^m (\chi_i \cdot f)(x) = f(x) \cdot \sum_{i=1}^m \chi_i(x) = f(x),$$

außerdem ist für $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ und $j=1, \dots, n$:

$$D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(x) = D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \left(\sum_{i=1}^m F_i \right)(x) = \sum_{i=1}^m D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F_i(x) \stackrel{(1.38)}{=} 0 \quad \underline{\text{qed.}}$$

1.11. Korollar :

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit.

Sei $f \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$), dann existiert eine offene Umgebung

$V \subset \mathbb{C}^n$ mit $M \subset V$ und ein $F \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(V)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$) mit

$$(1.7'') \quad F|_M = f$$

$$(1.8'') \quad D^\alpha \bar{\partial} F(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}.$$

Bew.:

Zu jedem $x_0 \in M$ wähle eine offene Umgebung $U(x_0) \subset \mathbb{C}^n$ wie in Satz 1.5. und

Korollar 1.10., wähle hieraus eine lokal-finite Überdeckung $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

von M . Seien $\chi_i \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\mathbb{C}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, Funktionen mit $0 \leq \chi_i(x) \leq 1$,

$\text{supp } \chi_i \subset U_i$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_i \equiv 1$ auf einer Umgebung von M in $\mathbb{C}^n$. Definiere

nun $F \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(V)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$), $V := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, durch $F := \sum_{i \in \mathbb{N}} F_i$

analog wie in Korollar 1.10. .

qed.

Wir können einen globalen Fortsetzungssatz auch für kompakte Mengen $S \subset \mathbb{C}^n$, die eine kompakte Teilmenge $K_0 \subset S$ enthalten, so daß $M := S \setminus K_0$ total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit ist, beweisen für Funktionen, die holomorph auf einer offenen Umgebung von K_0 und $\{M_p\}$ - (bzw. (M_p) -) differenzierbar auf M sind. Der Beweis ist jedoch technisch schwieriger als in Kor. 1.10., 1.11. .

1.12. Korollar :

Sei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $K_0 \subset S$ kompakte Teilmenge, so daß $M := S \setminus K_0$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ ist. Sei f eine Funktion, die holomorph auf einer offenen Umgebung $N \subset \mathbb{C}^n$ von K_0 ist und $f|_M \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) . Dann existiert ein $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$), so daß für eine offene Umgebung $U \subset N$ von K_0 gilt :

$$(1.7''') \quad F|_{S \cup U} = f|_{S \cup U}$$

$$(1.8''') \quad D^\alpha \bar{\partial} F(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in S \cup U, \alpha \in \mathbb{N}^{2n} .$$

Bew.:

Sei $f_0 \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$) eine Funktion mit $f_0|_{M \cup U_0} = f|_{M \cup U_0}$, wobei $U_0 \subset \overline{U_0} \subset N$ eine offene Umgebung von K_0 , insbesondere also $f_0|_{U_0}$ holomorph.

Die Menge $S \setminus U_0$ ist eine kompakte Teilmenge von M und kann deshalb von endlich vielen offenen und beschränkten Mengen $U_1, \dots, U_m \subset \mathbb{C}^n$ überdeckt werden, auf die Satz 1.5. anwendbar ist. Gelte außerdem, daß $\overline{U_i} \cap K_0 = \emptyset$ für $i=1, \dots, m$. Seien $V_1, \dots, V_m \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$, $i=1, \dots, m$ so, daß auch $V_1, \dots, V_m$ die Menge $S \setminus U_0$ überdecken.

Seien nun $\chi_i \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$, $i=1, \dots, m$, Funktionen mit $\chi_i \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von $\overline{M \cap V_i}$ und $\text{supp } \chi_i \subset U_i$ für $i=1, \dots, m$, dann lassen sich die Funktionen $\chi_i|_{M \cap U_i} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap U_i)$ nach dem Beweis von Satz 1.5. fortsetzen zu Funktionen $\tilde{\chi}_i \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U_i)$, so daß gilt :

$$(1.39) \quad \tilde{x}_i|_{M \cap U_i} = x_i|_{M \cap U_i}$$

$$(1.40) \quad D^\alpha \bar{\partial} \tilde{x}_i(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M \cap U_i, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}$$

und außerdem

$$(1.41) \quad D^\alpha \tilde{x}_i(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M \cap V_i, \alpha \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}.$$

Nach Bem. 1.9. kann außerdem erreicht werden, daß

$$(1.42) \quad \text{supp } \tilde{x}_i \subset U_i, \text{ so daß wir } \tilde{x}_i \text{ außerhalb } U_i \text{ durch } 0 \text{ auf ganz } \mathbb{C}^n \text{ fortsetzen können, } i=1, \dots, m.$$

Ebenfalls nach Satz 1.5. existiert eine Funktion $F_0 \in \mathcal{E}^{(Mp)}(U_1)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(U_1)$), so daß

$$(1.43) \quad F_0|_{M \cap U_1} = f_0|_{M \cap U_1} (= f|_{M \cap U_1})$$

$$(1.44) \quad D^\alpha \bar{\partial} F_0(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M \cap U_1, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}.$$

Definiere nun $f_1 \in \mathcal{E}^{(Mp)}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(\mathbb{C}^n)$) durch

$$(1.45) \quad f_1(z) := (1 - \tilde{x}_1(z)) \cdot f_0(z) + \tilde{x}_1(z) \cdot F_0(z), \text{ da } \text{supp } \tilde{x}_1 \subset U_1,$$

definiert dies eine Funktion f_1 für alle $z \in \mathbb{C}^n$.

Sei $U \subset U_0 \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung von K_0 mit $U \cap \overline{U_i} = \emptyset$ für $i=1, \dots, m$, so daß insbesondere $\tilde{x}_1 = 0$ auf U , dann gilt für $x \in (M \cap (U_0 \cup V_1)) \cup U$, daß

$$(1.46) \quad D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f_1(x) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, j=1, \dots, n, \text{ außerdem ist}$$

nach Definition

$$(1.47) \quad f_1|_{M \cup U} = f|_{M \cup U}.$$

Wir zeigen (1.46): Für $x \in (M \cap (U_0 \cup V_1)) \cup U$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt, daß

$$D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f_1(x) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (D^\alpha ((1 - \tilde{x}_1) \cdot f_0) + D^\alpha (\tilde{x}_1 \cdot F_0))(x) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \left(\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} (1 - \tilde{x}_1) \cdot D^\beta f_0 + \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \tilde{x}_1 \cdot D^\beta F_0 \right)(x) =$$

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \tilde{x}_1(x) \cdot D^\beta f_0(x) + D^{\alpha-\beta} (1-\tilde{x}_1)(x) \cdot D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f_0(x)) +$$

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \tilde{x}_1(x) \cdot D^\beta F_0(x) + D^{\alpha-\beta} \tilde{x}_1(x) \cdot D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F_0(x)) = 0,$$

denn für $\beta \leq \alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ ist $D^{\alpha-\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \tilde{x}_1(x) = 0$ wegen (1.40) und $\text{supp } \tilde{x}_1 \subset U_1$ für $x \in M$ und für $x \in U$, da $\tilde{x}_1 \equiv 0$ auf U ; $D^{\alpha-\beta} (1-\tilde{x}_1)(x) \cdot D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f_0(x) = 0$ für $x \in U$, da $f_0|_U$ holomorph, für $x \in M \cap U_0$, da $D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f_0(x) = 0$ und für $x \in M \cap V_1$, da $D^\alpha (1-\tilde{x}_1)(x) = 0$ für $\alpha \neq 0$ nach (1.41) und $(1-\tilde{x}_1)(x) = 0$ nach Definition; schließlich gilt $D^{\alpha-\beta} \tilde{x}_1(x) \cdot D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F_0(x) = 0$ nach (1.44) und da $\text{supp } \tilde{x}_1 \subset U_1$. Also gilt (1.46).

Es existiert nun nach Satz 1.5. eine Funktion $F_1 \in \mathcal{E}^{(Mp)}(U_2)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(U_2)$), so daß gilt:

$$(1.43') \quad F_1|_{M \cap U_2} = f_1|_{M \cap U_2} \quad \text{sowie}$$

$$(1.44') \quad D^\alpha \bar{\partial} F_1(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M \cap U_2, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}.$$

Definiere nun $f_2 \in \mathcal{E}^{(Mp)}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(\mathbb{C}^n)$) durch

$$(1.45') \quad f_2(z) := (1-\tilde{x}_2(z)) \cdot f_1(z) + \tilde{x}_2(z) \cdot F_1(z), \text{ wobei man wieder}$$

beachte, daß $\text{supp } \tilde{x}_2 \subset U_2$. Dann gilt für $x \in (M \cap (U_0 \cup V_1 \cup V_2)) \cup U$, daß

$$(1.46') \quad D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f_2(x) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, j=1, \dots, n \text{ mit der glei-}$$

chen Rechnung wie bei (1.46'). Außerdem gilt

$$(1.47') \quad f_2|_{M \cup U} = f_1|_{M \cup U} = f|_{M \cup U} \text{ nach Definition und (1.47).}$$

Wählen wir also sukzessiv für $1 \leq k \leq m-1$ Funktionen $F_k \in \mathcal{E}^{(Mp)}(U_{k+1})$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(U_{k+1})$) mit

$$(1.43'') \quad F_k|_{M \cap U_{k+1}} = f_k|_{M \cap U_{k+1}} (= f|_{M \cap U_{k+1}}) \text{ sowie}$$

$$(1.44'') \quad D^\alpha \bar{\partial} F_k(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M \cap U_{k+1}, \alpha \in \mathbb{N}^{2n},$$

und definieren dann $f_{k+1} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$) durch

$$(1.45'') \quad f_{k+1}(z) := (1 - \widetilde{\chi}_{k+1}(z)) \cdot f_k(z) + \widetilde{\chi}_{k+1}(z) \cdot F_k(z),$$

dann folgt wie oben für $x \in (M \cap (U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{k+1})) \cup U$, daß

$$(1.46'') \quad D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f_{k+1}(x) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, j=1, \dots, n \quad \text{sowie}$$

$$(1.47'') \quad f_{k+1}|_{M \cup U} = f_k|_{M \cup U} = f|_{M \cup U}.$$

Setze nun $F := f_m \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$), dann erfüllt wegen

$M \subset U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_m$ die Funktion F die Bedingungen (1.7''') und (1.8'''),

beachte dabei, daß $M \cup U = S \cup U$.

qed.

1.13. Bem. :

Mit Bem. 1.8. gelten die Korollare 1.10., 1.11. und 1.12. auch für C^∞ anstelle von $\mathcal{E}^{(M_p)}$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$), vgl. hierzu den Satz für C^r -Funktionen, $1 \leq r < \infty$ in Hörmander/Wermer [26] (Lemma 4.3.).

§ 2. Konstruktion von Umgebungssystemen aus Holomorphiegebieten

2.1. Definition :

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt, dann heißt K holomorph-konvex, falls K eine Umgebungsbasis aus pseudokonvexen offenen Mengen (d.h. aus Holomorphiegebieten) $U_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$ besitzt.

K heißt gleichmäßig holomorph-konvex, falls es ein festes $t \in (0,1)$ gibt, so daß zu jedem genügend kleinen $\epsilon > 0$ eine pseudokonvexe offene Menge $U_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$ existiert, so daß mit $T_\epsilon(K) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z,K) < \epsilon\}$ gilt

$$(2.1) \quad T_{t\epsilon}(K) \subset U_\epsilon \subset T_\epsilon(K)$$

2.2. Bem.:

Gleichmäßig holomorph-konvexe kompakte Mengen $K \subset \mathbb{C}^n$ wurden von Čirka [11] definiert, (uniformly H-convex sets). Offenbar gilt: K gleichmäßig holomorph-konvex $\Rightarrow K$ holomorph-konvex.

Bezeichnen wir mit $A(K)$ den Abschluß in $C(K)$ bzgl. der sup-Norm der in

einer offenen Umgebung von K holomorphen Funktionen, wobei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt, sowie $\Delta(A(K)) := \{\varphi \in A(K)' \mid \varphi \text{ ist multiplikativ und } \varphi \neq 0\}$, dann gilt:

$$(2.2) \quad K \text{ holomorph-konvex} \Rightarrow \Delta(A(K)) = K.$$

Zum Beweis bemerken wir, daß $K = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j$, wobei U_j Holomorphiegebiet

und $U_{j+1} \subset U_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, geschrieben werden kann. Nun ist $\Delta(\mathcal{O}(U_j)) = U_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ nach dem Charaktersatz, siehe z.B. Grauert/Remmert [21], Kap. V, §5, Satz 7, hierbei sei $\Delta(\mathcal{O}(U_j)) = \{\varphi \in \mathcal{O}(U_j)' \mid \varphi \text{ multiplikativ und } \varphi \neq 0\}$. Damit gilt $\Delta(\mathcal{O}(K)) = K$, da $\mathcal{O}(K) = \text{ind}_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(U_j)$. Wegen

$$\Delta(A(K)) \subset \Delta(\mathcal{O}(K)) \text{ folgt damit } \Delta(A(K)) = K.$$

Die Umkehrung von (2.2) gilt im allgemeinen nicht, in Björk [8], S. 51f, werden kompakte Mengen $K \subset \mathbb{C}^n$ angegeben mit $\Delta(A(K)) = K$, aber K nicht holomorph-konvex.

Wir bemerken noch, daß aus (2.2) für holomorph-konvexe $K \subset \mathbb{C}^n$ folgt, daß für das gemeinsame Spektrum der Koordinatenfunktionen $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ in $A(K)$

$$(2.3) \quad \sigma_{A(K)}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n) = K \quad \text{gilt, denn}$$

$\sigma_{A(K)}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n) = \{(\varphi(\underline{w}_1), \dots, \varphi(\underline{w}_n)) \mid \varphi \in \Delta(A(K))\} = K$, da wegen $\Delta(A(K)) = K$ die $\varphi \in \Delta(A(K))$ gerade die Punktfunktionale von Punkten $w \in K$ sind. Man vergleiche auch §4, Satz 4.11. .

Wir bringen nun Beispiele (gleichmäßig) holomorph-konvexer Mengen. Zunächst die folgende einfache Bemerkung:

2.3. Bem.:

i) $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt sei polynomkonvex $\Rightarrow K$ holomorph-konvex

ii) Jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ ist gleichmäßig holomorph-konvex

Bew.:

Zu i): Es existieren kompakte Polynompolyeder $K_j \subset \mathbb{C}^n$ mit $K_{j+1} \subset \text{int}(K_j)$ für $j \in \mathbb{N}$ und $K = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j$. Offenbar ist $U_j := \text{int}(K_j) \subset \mathbb{C}^n$ ein Holomorphiegebiet und $K = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j$, also ist $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ Umgebungsbasis von K .

Zu ii): Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist Holomorphiegebiet.

Der Beweis des folgenden Satzes ist im wesentlichen in Wermer [59], Lemma 17.3. enthalten :

2.4. Satz :

Sei M eine total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ und sei $K \subset M$ kompakt. Dann ist K gleichmäßig holomorph-konvex.

Bew.:

Dies ist ein Spezialfall von Satz 2.6., siehe den dortigen Beweis.

2.4.' Bem.:

Ist in Satz 2.4. die total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{C}^n$ selbst kompakt, so ist für genügend kleines $\varepsilon > 0$ $T_\varepsilon(M)$ streng pseudokonvex und damit M gleichmäßig holomorph-konvex, vgl. Nirenberg/Wells [36], Cor.4.2..

Die beiden folgenden Sätze werden benötigt, um von lokalen Aussagen über holomorphe Approximation auf globale Aussagen zu schließen. Wir zitieren zunächst den folgenden bekannten Satz, der eine Verallgemeinerung von Grauert's Satz über tubulare Umgebungen darstellt:

2.5. Satz :

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$, dann hat M eine Umgebungsbasis $\mathcal{F}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- i) Jedes $U \in \mathcal{F}$ ist ein Holomorphiegebiet in $\mathbb{C}^n$ und folglich gilt $H^{\ell}(U, \mathcal{O}) = 0$ für alle $\ell \geq 1$
- ii) $\mathcal{O}(V)$ ist dicht in $\mathcal{O}(U)$, falls $U \subset V$ und $U, V \in \mathcal{F}$

Als Folgerung erhalten wir:

- ii') Für jedes $U \in \mathcal{F}$ hat die kanonische Restriktion $\mathcal{P}: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(M)$ dichtes Bild

Bew.:

Siehe Harvey/Wells [23], Lemma 2.1., Theorem 2.2., Cor. 2.3. sowie Range/Siu [43], Prop. 1.1., Cor. 1.2. .

Wir wollen nun Satz 2.4. noch verfeinern und konstruieren für eine total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{C}^n$, sowie kompakte $K, \tilde{K} \subset M$ Holomorphiegebiete $U_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$, die sowohl K umfassen als auch eine feste δ -Umgebung von $\tilde{K}$ für vorgegebenes $\delta > 0$. Der folgende Satz wird in Satz 3.13. für $K := \overline{M \cap U}$ benötigt.

2.6. Satz :

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ und $K, \tilde{K} \subset M$ kompakt.

Sei δ mit $0 < \delta \leq \delta_0 \leq 1$ fest vorgegeben für genügend kleines $\delta_0 > 0$. Dann gibt es ein a mit $0 < a \leq 1/2$ und für jedes ε mit $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(\delta)$ ein Holomorphiegebiet $U_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$ mit

$$(2.4) \quad T_{(a/2)}(K) \cup T_{(a/2)}(\tilde{K}) \subset U_\varepsilon \subset T_\varepsilon(K) \cup T_\varepsilon(\tilde{K})$$

Hierbei bezeichne wieder $T_\varepsilon(K) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$.

Bew.:

Da M total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n$, ist die Funktion d^2 mit $d^2(z) = d(z, M)^2$ C^∞ und streng plurisubharmonisch in einer offenen Umgebung $V \subset \mathbb{C}^n$ von M , siehe Wermer [59], Lemma 17.2. Sei $\tilde{\chi}_\delta \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ eine Funktion mit $\tilde{\chi}_\delta \equiv 1$ auf $T_{\delta/2}(\tilde{K})$ und $\text{supp } \tilde{\chi}_\delta \subset T_\delta(\tilde{K})$, sowie $0 \leq \tilde{\chi}_\delta(z) \leq 1$, $z \in \mathbb{C}^n$, für festes δ . Ebenso sei für $\varepsilon > 0$ $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit $\chi_\varepsilon \equiv 1$ auf $T_{\varepsilon/2}(K)$, $\text{supp } \chi_\varepsilon \subset T_\varepsilon(K)$ und $0 \leq \chi_\varepsilon(z) \leq 1$, $z \in \mathbb{C}^n$, so, daß gilt $|D^\alpha \chi_\varepsilon(z)| \leq C_{|\alpha|} \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, $z \in \mathbb{C}^n$ und geeignete $C_{|\alpha|} > 0$, vgl. Malgrange [35], Kap. I, Lemma 4.2. Sei nun δ fest mit $0 < \delta \leq \delta_0$ und ε mit $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ so klein, daß

$$(2.5) \quad \text{supp } \chi_\varepsilon \cup \text{supp } \tilde{\chi}_\delta \subset \overline{T_\varepsilon(K)} \cup \overline{T_\delta(\tilde{K})} \subset \Omega \subset \bar{\Omega} \subset V$$

für ein offenes und beschränktes $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Dann ist für ein genügend kleines und festes a mit $0 < a \leq 1/2$ und $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ die Funktion $v_\varepsilon: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(2.6) \quad v_\varepsilon(z) := d^2(z) - a^2 \varepsilon^2 \chi_\varepsilon(z) - a^2 \tilde{\chi}_\delta(z) \quad \text{eine } C^\infty\text{-Funktion, die}$$

streng plurisubharmonisch auf Ω ist. Nach dem Satz von Sard (siehe z.B. Dieudonné [13], 16.23.1) gilt für v_ε , daß mit $N := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \text{grad } v_\varepsilon(z) = 0\}$ die Menge $v_\varepsilon(N) \subset \mathbb{R}$ das Maß 0 hat. Damit enthält jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ einen Punkt t_ε , so daß $v_\varepsilon^{-1}(t_\varepsilon) \cap N = \emptyset$. Zu $0 < \varepsilon \leq \min(\varepsilon_0, \delta)$ wähle ein solches $t_\varepsilon \in (-\frac{a^2}{2} \varepsilon^2, -\frac{a^2}{4} \varepsilon^2)$ und definiere

$$(2.7) \quad U_\varepsilon := \{z \in \Omega \mid v_\varepsilon(z) - t_\varepsilon < 0\}, \quad \text{dann ist } v_\varepsilon(z) - t_\varepsilon = 0 \text{ auf}$$

∂U_ε , $v_\varepsilon(z) - t_\varepsilon$ ist streng plurisubharmonisch auf Ω und $\text{grad}(v_\varepsilon(z) - t_\varepsilon) \neq 0$

für alle $z \in \partial U_\epsilon$, also ist die offene Menge U_ϵ pseudokonvex, da die Levi-Bedingung erfüllt ist (vgl. Hörmander [25], Theorem 2.6.12.) .

Es bleibt noch (2.4) zu zeigen:

$$\text{Sei zunächst } z \in T_{(a/2)\epsilon}(K). \text{ Dann ist } d(z, K) < \frac{a}{2} \epsilon \Rightarrow d(z, M)^2 < \frac{a^2}{4} \epsilon^2 \Rightarrow \\ d^2(z) < a^2 \epsilon^2 - \frac{3}{4} a^2 \epsilon^2 \Rightarrow d^2(z) < a^2 \epsilon^2 \chi_\epsilon(z) - \frac{3}{4} a^2 \epsilon^2 <$$

$$a^2 \epsilon^2 \chi_\epsilon(z) + a^2 \tilde{\chi}_\delta(z) + t_\epsilon. \text{ Sei nun } z \in T_{(a/2)\delta}(\tilde{K}). \text{ Dann ist } d(z, \tilde{K}) < \frac{a}{2} \delta \\ \Rightarrow d(z, M)^2 < \frac{a^2}{4} \delta^2 \Rightarrow d^2(z) < a^2 \delta^2 - \frac{3}{4} a^2 \delta^2 \Rightarrow d^2(z) < a^2 \tilde{\chi}_\delta(z) - \\ \frac{3}{4} a^2 \delta^2 \Rightarrow d^2(z) < a^2 \epsilon^2 \chi_\epsilon(z) + a^2 \tilde{\chi}_\delta(z) - \frac{3}{4} a^2 \epsilon^2, \text{ da } \epsilon' \leq \delta, \Rightarrow \\ d^2(z) < a^2 \epsilon^2 \chi_\epsilon(z) + a^2 \tilde{\chi}_\delta(z) + t_\epsilon. \text{ In beiden Fällen gilt also } z \in U_\epsilon.$$

Sei nun schließlich $z \in U_\epsilon$. Angenommen $z \notin T_\delta(\tilde{K}) \Rightarrow d^2(z) < a^2 \epsilon^2 \chi_\epsilon(z) + t_\epsilon < a^2 \epsilon^2 \chi_\epsilon(z)$. Dies kann nur dann erfüllt sein, wenn $\chi_\epsilon(z) > 0$, d.h. $z \in T_\epsilon(K)$. qed.

In Hörmander/Wermer [26] wird für gewisse kompakte Teilmengen $S \subset \mathbb{C}^n$ gezeigt, daß sie holomorph-konvex sind, und zwar 'gleichmäßig bis auf eine Ausnahmemenge' :

2.7. Satz :

Sei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und sei $K_0 \subset S$ eine kompakte Teilmenge so, daß $M := S \setminus K_0$ eine total-reelle C^1 -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ ist. Es existiere eine holomorph-konvexe kompakte Teilmenge $K_1 \subset S$, so daß K_1 eine bzgl. S offene Umgebung von K_0 enthält. Dann gilt für jedes kompakte $K \subset \mathbb{C}^n$ mit $K_0 \subset K \subset S$, daß K holomorph-konvex, und zu jeder offenen Umgebung $N \subset \mathbb{C}^n$ von K_0 und jedem ϵ mit $0 < \epsilon \leq \epsilon_0(N)$ existiert ein Holomorphiegebiet $U_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$ (fallend mit ϵ), so daß gilt :

$$(2.8) \quad T_{\epsilon/2}(K) \subset U_\epsilon \subset N \cup T_{2\epsilon}(S),$$

hierbei bezeichne wieder $T_\epsilon(S) := \{ z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, S) < \epsilon \}$.

Bew.:

Siehe Hörmander/Wermer [26], Theorem 3.1. .

§ 3. Die Approximationssätze

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Unser nächstes Ziel ist, für C^∞ -Funktionen u auf einer offenen Umgebung von $\bar{\Omega}$, Abschätzungen für $|D^\alpha u(x)|$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, $x \in K$, durch Terme der Form $|D^{\beta_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(y)|$, $|\beta_j| \leq |\alpha|$, $j=1, \dots, n$, $y \in T_\varepsilon(K) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) < \varepsilon\} \subset \Omega$ und $\|u\|_{L^2(T_\varepsilon(K))}$ zu finden und deren Wachstum in $\varepsilon \rightarrow 0$ und $|\alpha| \rightarrow \infty$ genau zu kontrollieren. Zunächst ein einfaches Lemma:

3.1. Lemma :

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $u \in C^\infty(\Omega)$, $\text{supp } u$ kompakt, dann gilt für $j=1, \dots, n$:

$$(3.1) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x) \right|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x)} dx$$

Bew.:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x) \right|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x)} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \bar{u}(x) dx$$

$$= (\text{part. Integration}) - \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_j} u(x) \cdot \bar{u}(x) dx = (\text{part. Integration})$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \bar{u}(x) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x) \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x)} dx = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(x) \right|^2 dx$$

qed.

3.2. Satz :

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und beschränkt, $V \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $V \subset V_\varepsilon \subset \Omega$, wobei $V_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, V) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon > 0$, dann gilt für jede C^∞ -Funktion u auf einer offenen Umgebung von $\bar{\Omega}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$:

$$(3.2) \quad \int_V |D^\alpha u(x)|^2 dx \leq B^{|\alpha|} \cdot \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \left(\frac{C|\alpha|}{\varepsilon} \right)^{2(k-1)} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_k}} D^{\alpha_k} u(x) \right|^2 dx + \left(\frac{C|\alpha|}{\varepsilon} \right)^{2|\alpha|} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)$$

für geeignete Konstanten $B > 0$ und $C > 0$, außerdem $j_k \in \{1, \dots, n\}$ und

$\alpha_k \in \mathbb{N}^{2n}$, $\alpha_k \leq \alpha$ mit $|\alpha_k| = |\alpha| - k$.

Bew.:

Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest mit $V \subset V_\epsilon \subset \Omega$. Für $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ setze $s := |\alpha| \in \mathbb{N}$; da für $s=0$ die Behauptung (3.2) trivial ist, gelte $s \in \mathbb{N}_+$. Für $1 \leq k \leq s$

definiere $W_k := V_{(k/s)\epsilon} \subset \Omega$ und $W_0 := V$. Außerdem sei $\chi_{k,\epsilon} \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ eine Funktion mit $\text{supp } \chi_{k,\epsilon} \subset W_k$, $\chi_{k,\epsilon} \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\overline{W_{k-1}}$, $0 \leq \chi_{k,\epsilon}(x) \leq 1$, sowie

$$(3.3) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_{k,\epsilon}(x) \right| \leq \frac{C \cdot s}{\epsilon} \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{C}^n (= \mathbb{R}^{2n}), j=1, \dots, 2n,$$

wobei $C > 0$ eine geeignete Konstante, (zum Beweis der Existenz siehe Malgrange [35], Kap. I, Lemma 4.2.). Schreibe nun $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}} D^{\alpha_1}$, wobei

$\alpha_1 \in \mathbb{N}^{2n}$ mit $|\alpha_1| = |\alpha| - 1$, $\ell_1 \in \{1, \dots, 2n\}$ und sei $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ definiert durch $j_1 := \ell_1$, falls $1 \leq \ell_1 \leq n$ und $j_1 := \ell_1 - n$, falls $n < \ell_1 \leq 2n$, dann gilt:

$$(3.4) \quad \int_V |D^\alpha u(x)|^2 dx = \int_V \left| \frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx \leq 2 \int_V \left| \frac{\partial}{\partial z_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx \leq 2 \int_{W_1} \left| \frac{\partial}{\partial z_{j_1}} (\chi_{1,\epsilon} \cdot D^{\alpha_1} u)(x) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} (\chi_{1,\epsilon} \cdot D^{\alpha_1} u)(x) \right|^2 dx =$$

Lemma 3.1

$$4 \int_{W_1} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} (\chi_{1,\epsilon} \cdot D^{\alpha_1} u)(x) \right|^2 dx = 4 \int_{W_1} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} \chi_{1,\epsilon}(x) \cdot D^{\alpha_1} u(x) + \chi_{1,\epsilon}(x) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx \leq 8 \int_{W_1} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} \chi_{1,\epsilon}(x) \cdot D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 + \left| \chi_{1,\epsilon}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx$$

$$8 \int_{W_1} \|x_{1,\epsilon}\|_1^2 |D^{\alpha_1} u(x)|^2 dx + \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx =$$

$$8 \left(\int_{W_1} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx + \|x_{1,\epsilon}\|_1^2 \underbrace{\int_{W_1} |D^{\alpha_1} u(x)|^2 dx}_{(3.5)} \right)$$

Hierbei sei $\|x_{k,\epsilon}\|_1 := \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ |x|=1}} |D^{\beta} x_{k,\epsilon}(x)|$. Schreiben wir nun ebenso wie oben

$$D^{\alpha_1} = \frac{\partial}{\partial x_{\ell_2}} D^{\alpha_2}, \alpha_2 \in \mathbb{N}^{2n} \text{ mit } |\alpha_2| = |\alpha_1| - 1, \ell_2 \in \{1, \dots, 2n\} \text{ und wieder}$$

$j_2 \in \{1, \dots, n\}$ mit $j_2 := \ell_2$, falls $1 \leq \ell_2 \leq n$ und $j_2 := \ell_2 - n$, falls $n < \ell_2 \leq 2n$, dann folgt durch Anwendung der Ungleichung (3.4) auf (3.5) :

$$(3.4') \quad \int_V |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \leq$$

$$8 \left(\int_{W_1} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx + \|x_{1,\epsilon}\|_1^2 \cdot 8 \left(\int_{W_2} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_2}} D^{\alpha_2} u(x) \right|^2 dx + \right. \right.$$

$$\left. \left. \|x_{2,\epsilon}\|_1^2 \cdot \int_{W_2} |D^{\alpha_3} u(x)|^2 dx \right) \right) \leq$$

$$8^2 \left(\int_{W_1} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx + \|x_{1,\epsilon}\|_1^2 \cdot \int_{W_2} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_2}} D^{\alpha_2} u(x) \right|^2 dx + \right.$$

$$\left. \|x_{1,\epsilon}\|_1^2 \|x_{2,\epsilon}\|_1^2 \cdot \int_{W_2} |D^{\alpha_3} u(x)|^2 dx \right) \leq$$

$$8^2 \left(\int_{W_1} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_1}} D^{\alpha_1} u(x) \right|^2 dx + \left(\frac{C \cdot S}{\epsilon} \right)^2 \int_{W_2} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_2}} D^{\alpha_2} u(x) \right|^2 dx + \right.$$

$$(3.5') \quad \left(\frac{C \cdot S}{\epsilon} \right)^{2 \cdot 2} \int_{W_2} |D^{\alpha_3} u(x)|^2 dx$$

Insgesamt s-maliges Anwenden der Ungleichung (3.4) auf den jeweils letzten Term (3.5') ergibt:

$$\begin{aligned}
 (3.4'') \quad & \int_V |D^\alpha u(x)|^2 dx \leq \\
 & 8^s \left(\sum_{k=1}^s \left(\frac{C \cdot s}{\epsilon} \right)^{2(k-1)} \int_{W_k} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_k}} D^{\alpha_k} u(x) \right|^2 dx + \left(\frac{C \cdot s}{\epsilon} \right)^{2s} \int_{W_s} |u(x)|^2 dx \right) \leq \\
 & 8^s \left(\sum_{k=1}^s \left(\frac{C \cdot s}{\epsilon} \right)^{2(k-1)} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{j_k}} D^{\alpha_k} u(x) \right|^2 dx + \left(\frac{C \cdot s}{\epsilon'} \right)^{2s} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right),
 \end{aligned}$$

wobei $j_k \in \{1, \dots, n\}$ und $\alpha_k \in \mathbb{N}^{2n}$ mit $|\alpha_k| = |\alpha| - k$. qed.

3.3. Bem.:

Satz 3.2. ist eine wesentliche Verschärfung von Hörmander [25], Lemma 5.7.1. und 5.7.2., da in Satz 3.2. die Abschätzungs-'Konstanten' in ihrem Wachstum sowohl für $\epsilon \rightarrow 0$ ($\epsilon \leq d(V, \partial\Omega)$) als auch für $|\alpha| \rightarrow \infty$ kontrolliert werden.

Das folgende Lemma erlaubt es uns, in Satz 3.2. anstelle der L^2 -Norm von $D^\alpha u$ die sup-Norm von $D^\alpha u$ auf $K \subset \Omega$ kompakt abzuschätzen.

3.4. Lemma :

Sei $x \in \mathbb{C}^n$ fest und bezeichne $B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{C}^n \mid |x-y| < \epsilon\}$ für $\epsilon > 0$, dann gilt für jede C^∞ -Funktion u auf einer Umgebung von $\overline{B_\epsilon(x)}$:

$$(3.6) \quad |u(x)| \leq C \cdot \left(\frac{1}{\epsilon^n} \left(\int_{B_\epsilon(x)} |u(y)|^2 dy \right)^{1/2} + \epsilon \cdot \sup_{\substack{y \in B_\epsilon(x) \\ j=1, \dots, n}} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(y) \right| \right),$$

wobei $C > 0$ fest.

Bew.:

Einen Beweis der a priori - Abschätzung (3.6) findet man z.B. in Wermer [59], Lemma 16.7. und 16.8., vgl. auch Hörmander/Wermer [26], Lemma 4.4..

Kombination von Satz 3.2. und Lemma 3.4. ergibt nun :

3.5. Satz :

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt, so daß $T_\epsilon(K) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) < \epsilon; z \in \Omega\}$ für ein $\epsilon > 0$, dann gilt für jede C^∞ -Funktion u auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ und für alle $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$:

$$(3.7) \quad \sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)|^2 \leq C_1 \cdot B^{|\alpha|} \frac{1}{\epsilon^{2n}} \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \left(\frac{C_2}{\epsilon} \right)^{2(k-1)} \sup_{\substack{|\beta|=|\alpha|-k \\ j=1, \dots, n}} \int_{T_\epsilon(K)} |D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(y)|^2 dy \right. \\ \left. + \left(\frac{C_2}{\epsilon} \right)^{2|\alpha|} \int_{T_\epsilon(K)} |u(y)|^2 dy \right) + C_1 \cdot \epsilon^2 \sup_{\substack{y \in T_\epsilon(K) \\ j=1, \dots, n}} |D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(y)|^2,$$

hierbei sind $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ und $B > 0$ geeignete Konstanten.

Bew.:

Sei $x \in K$, dann folgt aus Lemma 3.4. für $\epsilon/2$ anstelle von ϵ und für $D^\alpha u$ anstelle von u , $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, daß

$$(3.8) \quad |D^\alpha u(x)|^2 \leq 2 C^2 \left(\left(\frac{2}{\epsilon} \right)^{2n} \int_{\substack{B_\epsilon(x) \\ \bar{Z}}} |D^\alpha u(y)|^2 dy + \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^2 \sup_{\substack{y \in B_\epsilon(x) \\ \bar{Z}}} |D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(y)|^2 \right) \\ j=1, \dots, n \\ \leq C_1 \cdot \left(\frac{1}{\epsilon^{2n}} \int_{T_{(\epsilon/2)}(K)} |D^\alpha u(y)|^2 dy + \epsilon^2 \cdot \sup_{y \in T_{(\epsilon/2)}(K)} |D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(y)|^2 \right).$$

Mit Satz 3.2. folgt nun für $\epsilon/2$ anstelle von ϵ , daß

$$(3.9) \quad |D^\alpha u(x)|^2 \leq C_1 \cdot \frac{1}{\epsilon^{2n}} \cdot B^{|\alpha|} \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \left(\frac{C_2}{\epsilon} \right)^{2(k-1)} \sup_{\substack{|\beta|=|\alpha|-k \\ j=1, \dots, n}} \int_{T_\epsilon(K)} |D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(y)|^2 dy \right. \\ \left. + \left(\frac{C_2}{\epsilon} \right)^{2|\alpha|} \int_{T_\epsilon(K)} |u(y)|^2 dy \right) + C_1 \cdot \epsilon^2 \cdot \sup_{\substack{y \in T_\epsilon(K) \\ j=1, \dots, n}} |D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(y)|^2 \quad \text{qed.}$$

Die beiden folgenden Sätze geben Auskunft über die Flachheit ultra-differenzierbarer Funktionen $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$), $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, in der Nähe ihrer Nullstellen unendlicher Ordnung. *)

3.6. Satz :

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset V$ kompakt, sei $\varepsilon_0 > 0$ so klein, daß $K_{\varepsilon_0} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leq \varepsilon_0\} \subset V$. Sei $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$) mit $D^\alpha g(x^*) = 0$ für alle $x^* \in K$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$, dann folgt für ein $h > 0$ (bzw. für alle $h > 0$), daß für $x \in K_{\varepsilon_0}$

$$(3.10) \quad |D^\alpha g(x)| \leq C \cdot (2\tilde{H})^p \cdot \frac{1}{p!} \cdot d(x, K)^p \cdot C_{K_{\varepsilon_0}, h} \cdot h^{p+|\alpha|} \cdot M_{p+|\alpha|},$$

für alle $p \in \mathbb{N}$, wobei $C > 0$, $\tilde{H} > 0$ fest und $C_{K_{\varepsilon_0}, h} := \|g\|_{M_{p, h, K_{\varepsilon_0}}}$

$$\sup_{\substack{y \in K_{\varepsilon_0} \\ \beta \in \mathbb{N}^n}} \frac{|D^\beta g(y)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}.$$

Bew.:

Sei $x \in K_{\varepsilon_0}$, dann folgt mit der Taylorformel durch Entwicklung von $D^\alpha g(x)$ in $x^* \in K$ mit $|x - x^*| = d(x, K)$, daß

$$(3.11) \quad D^\alpha g(x) = \sum_{|\beta| \leq p-1} \frac{D^{\beta+\alpha} g(x^*)}{\beta!} (x-x^*)^\beta = \sum_{|\beta|=p} \frac{D^{\beta+\alpha} g(x_1)}{\beta!} (x-x^*)^\beta$$

für alle $p \in \mathbb{N}$, wobei $x_1 \in [x, x^*] := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = tx + (1-t)x^* \text{ für ein } t \in [0, 1]\}$.

Es gilt $x_1 \in K_{\varepsilon_0}$, da $|x_1 - x^*| = |tx + (1-t)x^* - x^*| = |tx - tx^*| \leq |x - x^*| \leq \varepsilon_0$ für $x_1 = tx + (1-t)x^*$, $t \in [0, 1]$.

Da $D^{\beta+\alpha} g(x^*) = 0$ für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$, folgt aus (3.11), daß

$$(3.12) \quad |D^\alpha g(x)| \leq \sum_{|\beta|=p} \frac{1}{\beta!} \cdot \sup_{x_1 \in K_{\varepsilon_0}} |D^{\beta+\alpha} g(x_1)| |x-x^*|^p \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N}.$$

Wegen $p! \leq \tilde{H}^p \cdot \beta!$ für $p = |\beta|$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, wobei $\tilde{H} := 2^{n-1}$ gewählt werden kann, folgt:

*) Vgl. Satz 1.5. und S. 130, 3.)

$$\begin{aligned}
 (3.12') \quad |D^\alpha g(x)| &\leq \sum_{|\beta|=p} \frac{1}{p!} \tilde{H}^p \cdot \sup_{x_1 \in K_{\varepsilon_0}} |D^{\beta+\alpha} g(x_1)| \cdot d(x, K)^p \\
 &\leq (p+1)^n \cdot \frac{1}{p!} \tilde{H}^p \cdot \sup_{\substack{x_1 \in K_{\varepsilon_0} \\ |\beta|=p}} |D^{\beta+\alpha} g(x_1)| \cdot d(x, K)^p \quad \forall p \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Da $(p+1)^n \leq C \cdot 2^p$ für ein $C > 0$, das nur von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, folgt

$$(3.12'') \quad |D^\alpha g(x)| \leq C \cdot (2\tilde{H})^p \cdot \frac{1}{p!} \cdot d(x, K)^p \cdot C_{K_{\varepsilon_0}} h^{p+\alpha} \cdot M_{p+|\alpha|} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

qed.

Als Folgerung hieraus ergibt sich der folgende Satz, der in §5 und §6 für die Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls auf (M_p) -differenzierbare Funktionen gebraucht wird:

3.7. Satz :

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset V$ kompakt, außerdem sei $\varepsilon_0 > 0$ so klein, daß $K_{\varepsilon_0} \subset V$.

Für $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ (bzw. $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$) gelte $D^\alpha g(x^*) = 0$ für alle $x^* \in K$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$, dann folgt für ein festes $\bar{C} > 0$:

$$(3.13) \quad \exists_{L > 0} \quad \exists_{C_1 > 0} \quad |g(x)| \leq C_1 \cdot \|g\|_{M_p, (\bar{C}/L), K_{\varepsilon_0}} \cdot \exp\left(-M^*\left(\frac{L}{d(x, K)}\right)\right)$$

für alle $x \in K_{\varepsilon_0} \setminus K$, (dies gilt für alle $L > 0$ mit $\|g\|_{M_p, (\bar{C}/L), K_{\varepsilon_0}} < \infty$);

bzw.

$$(3.13') \quad \forall_{L > 0} \quad \exists_{C_1 > 0} \quad |g(x)| \leq C_1 \cdot \|g\|_{M_p, (\bar{C}/L), K_{\varepsilon_0}} \cdot \exp\left(-M^*\left(\frac{L}{d(x, K)}\right)\right)$$

für alle $x \in K_{\varepsilon_0} \setminus K$. Hierbei bezeichne $M^*(x)$ die zu $M_p/p!$ assoziierte Funktion, vgl. S.5.

Als Zusatz bemerken wir, daß insbesondere für die Gevrey-Folgen $M_p = p!^s$, $s > 1$, die Ungleichungen in (3.13) und (3.13') auch geschrieben werden können :

$$(3.13'') \quad |g(x)| \leq C_1 \cdot \|g\|_{M_p, (\bar{C}/L), K_{\varepsilon_0}} \cdot \exp\left(-\frac{L}{d(x, K)^{1/(s-1)}}\right) \quad \forall x \in K_{\varepsilon_0} \setminus K.$$

Außerdem gilt, falls lediglich $g \in C^\infty(V)$ mit $D^\alpha g(x^*) = 0$ für alle $x^* \in K$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vorausgesetzt wird, daß

$$(3.13''') \quad \bigvee_{p \in \mathbb{N}} \quad \exists_{C_p > 0} \quad |g(x)| \leq C_p \cdot \|g\|_{p, K_{\epsilon_0}} \cdot d(x, K)^p \quad \text{für alle}$$

$$x \in K_{\epsilon_0}, \text{ wobei } \|g\|_{p, K_{\epsilon_0}} := \sup_{\substack{y \in K_{\epsilon_0} \\ \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq p}} |D^\beta g(y)|.$$

Bew.:

Sei $x \in K_{\epsilon_0} \setminus K$, nach Satz 3.6. gilt für ein $h > 0$ (bzw. für alle $h > 0$), daß $|g(x)| \leq C \cdot C_{K_{\epsilon_0}, h} \cdot (2\tilde{H})^p \cdot \frac{1}{p!} \cdot d(x, K)^p \cdot h^p \cdot M_p$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Es folgt, daß

$$(3.14) \quad |g(x)| \leq C \cdot C_{K_{\epsilon_0}, h} \cdot \inf_{p \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{p!} (2\tilde{H}h)^p d(x, K)^p M_p \right) =$$

$$M_0 \cdot C \cdot C_{K_{\epsilon_0}, h} \cdot \exp\left(-M^* \left(\frac{1}{2\tilde{H}h \cdot d(x, K)}\right)\right), \text{ die Behauptung}$$

(3.13) bzw. (3.13') folgt also mit $L := 1/(2Hh)$ und $C_1 := M_0 \cdot C$, sowie $\bar{C} := 1/(2H)$.

Der Zusatz (3.13'') folgt, da die assoziierte Funktion $M^*(x)$ zu $M_p/p! = p!^{s-1}$ äquivalent zu der Funktion $x \mapsto x^{1/(s-1)}$, $x \in \mathbb{R}_+$, ist, (siehe (1.2)), d.h. es existieren Konstanten $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, so daß

$$(3.15) \quad M^*(h_1 x) + \log B_1 \leq x^{1/(s-1)} \leq M^*(h_2 x) + \log B_2 \quad \text{für alle}$$

$$x \in \mathbb{R}_+.$$

Schließlich folgt der Zusatz (3.13''') unmittelbar aus dem Beweis von Satz 3.6. bis (3.12').

qed.

3.8. Definition :

Sei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $K_0 \subset S$ kompakte Teilmenge, so daß $M := S \setminus K_0$ eine total-reelle C^∞ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ ist. Es sei $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von K_0 aus offenen Mengen $W_k \subset \mathbb{C}^n$ mit $\overline{W_{k+1}} \subset W_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Räume

$$(3.16) \quad C^\infty \mathcal{O}(M, W_k) := \{f: M \cup W_k \longrightarrow \mathbb{C} \mid f|_M \in C^\infty(M), f|_{W_k} \in \mathcal{O}(W_k), \text{ und}$$

$$\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k) := \{f: M \cup W_k \longrightarrow \mathbb{C} \mid f|_M \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M), f|_{W_k} \in \mathcal{O}(W_k)\},$$

entsprechend $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k)$. Man versehe den Raum $C^\infty \mathcal{O}(M, W_k)$ mit der von $C^\infty(M) \times \mathcal{O}(W_k)$ induzierten (projektiven) Topologie, entsprechend $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k)$ und $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k)$. Dann ist $C^\infty \mathcal{O}(M, W_k)$ isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $C^\infty(M) \times \mathcal{O}(W_k)$, ebenso ist $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k)$ isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\mathcal{E}^{(M_p)}(M) \times \mathcal{O}(W_k)$, entsprechend $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k)$. Es folgt insbesondere, daß $C^\infty \mathcal{O}(M, W_k)$ und $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k)$ Fréchet-Räume sind, da $C^\infty(M)$, $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ und $\mathcal{O}(W_k)$ Fréchet-Räume.

Wir definieren nun die Räume $C^\infty \mathcal{O}(M, K_0)$, $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ und $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ aller auf $M \cup C^\infty$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) differenzierbaren und in einer offenen Umgebung von K_0 holomorphen Funktionen, hierbei seien wie üblich solche Funktionen identifiziert, welche auf M sowie auf einer offenen Umgebung von K_0 übereinstimmen. Die Räume seien mit der Topologie

$$(3.16') \quad C^\infty \mathcal{O}(M, K_0) = \text{ind}_{k \in \mathbb{N}} C^\infty \mathcal{O}(M, W_k) \quad \text{bzw.}$$

$$\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0) = \text{ind}_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k)$$

(entsprechend $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$) versehen. Hierbei bezeichne ind die Bildung des lokalkonvexen induktiven Limes.

Wir kommen nun zum Beweis der angekündigten Approximationssätze:

3.9. Satz :

Sei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $K_0 \subset S$ eine kompakte Teilmenge, so daß $M := S \setminus K_0$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ ist.

Es existiere eine Umgebungsbasis $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von K_0 aus offenen Mengen $W_k \subset \mathbb{C}^n$ mit $\overline{W_{k+1}} \subset W_k$ so, daß $S_k := S \cup \overline{W_k}$ holomorph-konvex ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

Die natürliche Abbildung $\mathcal{P}: \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ hat dichtes Bild, (ebenso $\mathcal{P}: \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$).

Bew.:

Sei $f \in \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$), dann existiert nach Korollar 1.12. ein $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$), so daß für eine beschränkte offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ von K_0 gilt, daß $F|_U$ holomorph ist, sowie

$$(3.17) \quad F|_{S \cup U} = f|_{S \cup U} \quad \text{und}$$

$$(3.18) \quad D^\alpha \overline{\partial} F(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in S \cup U, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}.$$

Wähle nun $k_1 \in \mathbb{N}$ so, daß $\overline{W_{k_1}} \subset U$, dann ergibt die Anwendung von Satz 2.7. auf $\overline{W_{k_1}}$ und S_{k_1} anstelle von K_0 und S , (beachte, daß $S_{k_1} \setminus \overline{W_{k_1}} = M \setminus \overline{W_{k_1}} \subset M$ total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit): Für die holomorph-konvexe kompakte Menge $K := S_{k_1}$ existiert zu der offenen Umgebung U von $\overline{W_{k_1}}$ und jedem ϵ mit $0 < \epsilon \leq \epsilon_0(U)$ eine pseudokonvexe offene Menge $U_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$ (fallend mit ϵ), so daß gilt:

$$(3.19) \quad T_{(\epsilon/2)}(K) \subset U_\epsilon \subset U \cup T_{2\epsilon}(K) \quad , \quad \text{hierbei bezeichne wieder} \\ (i) \quad (ii)$$

$T_\epsilon(K) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) < \epsilon\}$. Falls U beschränkt gewählt wird, sind die U_ϵ beschränkt und pseudokonvex und wir können annehmen, daß $U_\epsilon \subset B_r := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| \leq r\}$ für alle ϵ mit $0 < \epsilon \leq \epsilon_0(U)$ und geeignetes festes $r > 0$. Damit existiert nach Hörmander [24], Theorem 2.2.3. (vgl. auch Wermer [59], Theorem 16.1) eine Funktion $g_\epsilon \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U_\epsilon)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U_\epsilon)$) mit

$$(3.20) \quad \overline{\partial} g_\epsilon = \overline{\partial} F \quad \text{in } U_\epsilon, \text{ sowie}$$

$$(3.21) \quad \int_{U_\epsilon} |g_\epsilon(y)|^2 dy \leq C \cdot \sup_{j=1, \dots, n} \int_{U_\epsilon} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(y) \right|^2 dy \quad \text{für ein} \\ \text{festes } C > 0.$$

Zur Regularität der Lösung g_ϵ von (3.20) bemerke man, daß mit $h_\epsilon := F - g_\epsilon$ gilt, daß h_ϵ wegen (3.20) holomorph in U_ϵ , also ist $g_\epsilon = F - h_\epsilon$ und da $F|_{U_\epsilon} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U_\epsilon)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U_\epsilon)$), folgt auch $g_\epsilon \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U_\epsilon)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U_\epsilon)$). Für $0 < \epsilon \leq \epsilon_0(U)$ gilt nach Satz 3.5. für $(\epsilon/4)$ anstelle von ϵ und $u = g_\epsilon$, für alle $x \in K$ und $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$:

$$(3.22) \quad |D^\alpha g_\epsilon(x)|^2 \leq C_1 \cdot B^{|\alpha|} \cdot \frac{1}{\epsilon^{2n}} \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \left(\frac{C_2 |\alpha|}{\epsilon} \right)^{2(k-1)} \sup_{\substack{|\beta|=|\alpha|-k \\ j=1, \dots, n}} \int_{T_{\frac{\epsilon}{4}}(K)} |D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} g_\epsilon(y)|^2 dy \right. \\ \left. + \left(\frac{C_2 |\alpha|}{\epsilon} \right)^{2|\alpha|} \int_{T_{\frac{\epsilon}{4}}(K)} |g_\epsilon(y)|^2 dy \right) + C_1 \cdot \epsilon^2 \cdot \sup_{\substack{y \in T_{\frac{\epsilon}{4}}(K) \\ j=1, \dots, n}} |D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} g_\epsilon(y)|^2$$

Aus (3.19)(i), (3.20) und (3.21) folgt

$$(3.23) \quad |D^\alpha g_\epsilon(x)|^2 \leq C_1 \cdot B^{|\alpha|} \cdot \frac{1}{\epsilon^{2n}} \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \left(\frac{C_2 |\alpha|}{\epsilon} \right)^{2(k-1)} \sup_{\substack{|\beta|=|\alpha|-k \\ j=1, \dots, n}} \int_{U_\epsilon} |D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(y)|^2 dy \right. \\ \left. + \left(\frac{C_2 |\alpha|}{\epsilon} \right)^{2|\alpha|} \cdot C \cdot \sup_{j=1, \dots, n} \int_{U_\epsilon} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(y) \right|^2 dy \right) + C_1 \cdot \epsilon^2 \cdot \sup_{\substack{y \in U_\epsilon \\ j=1, \dots, n}} |D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(y)|^2$$

Aus (3.19)(ii) folgt unter Beachtung von $\bar{\partial} F \equiv 0$ auf U , daß

$$(3.24) \quad |D^\alpha g_\epsilon(x)|^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
& C_3 \cdot B_1^{-1} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \left(\frac{C_2^{|\alpha|}}{\varepsilon} \right)^{2(k-1)} \sup_{\substack{|\beta| = |\alpha| - k \\ j=1, \dots, n \\ y \in T_{2\varepsilon}(K)}} |D^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(y)|^2 \right. \\
& + \left. \left(\frac{C_2^{|\alpha|}}{\varepsilon} \right)^{2|\alpha|} \sup_{\substack{j=1, \dots, n \\ y \in T_{2\varepsilon}(K)}} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(y) \right|^2 \right) + C_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot \sup_{j=1, \dots, n} |D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(y)|^2
\end{aligned}$$

Da $\overline{W_{k1}} \subset U$, folgt aus (3.18) insbesondere, daß $D^\alpha \bar{\partial} F(x)' = 0$ für alle $x \in K = S_{k1} = S \cup \overline{W_{k1}} \subset S \cup U$. Dann gilt mit Satz 3.6., vgl. (3.12'), für $y \in T_{2\varepsilon}(K)$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, $j=1, \dots, n$, für ein $\bar{h} > 0$ (bzw. für alle $\bar{h} > 0$):

$$(3.25) \quad |D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(y)| \leq C \cdot (2\tilde{H})^p \cdot \frac{1}{p!} \cdot d(y, K)^p \cdot \tilde{C}_{\bar{h}} \cdot \bar{h}^{p+|\alpha|+1} \cdot M_{p+|\alpha|+1}$$

für alle $p \in \mathbb{N}$; wobei $C > 0$, $\tilde{H} > 0$ fest und $\tilde{C}_{\bar{h}} = \|F\|_{M_p, \bar{h}, T_{2\varepsilon_0}(U)(K)}$.

Beachte, daß Satz 3.6. hier für $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F$ anstelle von g angewendet wird.

Aus (3.24) folgt durch Anwendung von (3.25) (für $p=k+n$, bzw. $p=|\alpha|+n+1$, bzw. $p=0$) und für $x \in K$ und $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$:

$$\begin{aligned}
(3.26) \quad |D^\alpha g_\varepsilon(x)|^2 & \leq \\
& C_4 \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^2 \cdot B_1^{|\alpha|} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \left(\frac{C_2^{|\alpha|}}{\varepsilon} \right)^{2(k-1)} \cdot (2\tilde{H})^{2(k+n)} \cdot \frac{1}{(k+n)!^2} \cdot \varepsilon^{2(k+n)} \cdot \right. \\
& \bar{h}^{2(|\alpha|+n+1)} \cdot M_{|\alpha|+n+1}^2 \\
& + \left. \left(\frac{C_2^{|\alpha|}}{\varepsilon} \right)^{2|\alpha|} \cdot (2\tilde{H})^{2(|\alpha|+n+1)} \cdot \frac{1}{(|\alpha|+n+1)!^2} \cdot \varepsilon^{2(|\alpha|+n+1)} \cdot \bar{h}^{2(|\alpha|+n+2)} \cdot M_{|\alpha|+n+2}^2 \right) \\
& + C_4 \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \bar{h}^{2(|\alpha|+1)} \cdot M_{|\alpha|+1}^2 \leq \\
& C_4 \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^2 \cdot B_1^{|\alpha|} \cdot \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} (C_2^{|\alpha|})^{2(k-1)} \cdot (2\tilde{H})^{2(k+n)} \cdot \frac{1}{(k+n)!^2} \cdot \bar{h}^{2(|\alpha|+n+1)} \cdot \right. \\
& \left. M_{|\alpha|+n+1}^2 + (C_2^{|\alpha|})^{2|\alpha|} \cdot (2\tilde{H})^{2(|\alpha|+n+1)} \cdot \frac{1}{(|\alpha|+n+1)!^2} \cdot \bar{h}^{2(|\alpha|+n+2)} \cdot M_{|\alpha|+n+2}^2 \right) +
\end{aligned}$$

$$+ C_4 \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^2 \cdot \epsilon^2 \cdot \bar{h}^{2(|\alpha|+1)} M_{|\alpha|+1}^2 \leq \quad (M2)$$

$$C \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^2 \cdot B_2^{|\alpha|} \cdot \epsilon^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|+1} (C_2 \cdot |\alpha| \cdot 2\bar{h})^{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(k-1)!^2} \cdot \bar{h}^{2|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|}^2 \right) \leq$$

$$C \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^2 \cdot B_2^{|\alpha|} \cdot \epsilon^2 \cdot \bar{h}^{2|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|}^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (C_2 \cdot |\alpha| \cdot 2\bar{h})^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \right)^2 \leq$$

$$\tilde{C}^2 \cdot \tilde{C}_{\bar{h}}^2 \cdot B_3^{2|\alpha|} \cdot \epsilon^2 \cdot \bar{h}^{2|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|}^2, \quad (\text{wobei } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0(U)),$$

für ein $\bar{h} > 0$ (bzw. für alle $\bar{h} > 0$). Damit gilt also für $x \in K = S_{k_1} = S \cup \overline{W_{k_1}}$:

$$(3.26') \quad |D^\alpha g_\epsilon(x)| \leq \tilde{C} \cdot \tilde{C}_{\bar{h}} \cdot B_3^{|\alpha|} \cdot \bar{h}^{|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|} \cdot \epsilon, \quad \text{und damit}$$

$$(3.26'') \quad \sup_{\substack{x \in K \\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n}}} \frac{|D^\alpha g_\epsilon(x)|}{(B_3 \cdot \bar{h})^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \leq \tilde{C} \cdot \tilde{C}_{\bar{h}} \cdot \epsilon \longrightarrow 0, \quad \text{falls } \epsilon \rightarrow 0.$$

Also folgt, daß $F - h_\epsilon = g_\epsilon \rightarrow 0$ in der Topologie von $\mathcal{Z}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ (bzw. $\mathcal{Z}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$) für $\epsilon \rightarrow 0$. Da $F|_{S \cup U} = f|_{S \cup U}$ nach (3.17) und h_ϵ holomorph auf $U_\epsilon \supset S_{k_1} \supset S$, ist damit Satz 3.9. bewiesen. QED.

Mit den gleichen Methoden wie im Beweis zu Satz 3.9. folgt insbesondere auch der C^∞ -Fall:

3.9.' Korollar :

Sei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $K_0 \subset S$ kompakte Teilmenge, so daß $M := S \setminus K_0$ eine total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ ist. Es existiere eine Umgebungsbasis $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von K_0 aus offenen Mengen $W_k \subset \mathbb{C}^n$ mit $\overline{W_{k+1}} \subset W_k$ so, daß $S_k := S \cup \overline{W_k}$ holomorph-konvex ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

Die natürliche Abbildung $\mathcal{F}: \mathcal{O}(S) \longrightarrow C^\infty \mathcal{O}(M, K_0)$ hat dichtes Bild.

Bew.:

Für $f \in C^\infty \mathcal{O}(M, K_0)$ liefert Bem. 1.13. in Verbindung mit Korollar 1.12.

ein $F \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit (3.17) und (3.18). Der gleiche Beweis wie für Satz 3.9.

(man benutze (3.12') anstelle von (3.25)) liefert dann für jedes fest vorgegebene $m \in \mathbb{N}$, daß für $x \in K := S_{k_1}$ gilt anstelle von (3.26') und (3.26'') :

$$(3.27) \quad \sup_{x \in K} |D^\alpha g_\epsilon(x)| \leq \bar{C}_m \cdot \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{und die Behauptung} \\ |\alpha| \leq m$$

folgt wie im Beweis von Satz 3.9. .

ged.

3.10. Bem.:

Um in Satz 3.9. und Korollar 3.9.' zu zeigen, daß S_k holomorph-konvex ist, genügt es nach Satz 2.7., eine holomorph-konvexe kompakte Menge $K_1^k \subset S_k$ zu finden, die eine bzgl. S_k offene Umgebung von $\overline{W_k}$ enthält, beachte dabei, daß $S_k \setminus \overline{W_k} = M \setminus \overline{W_k} \subset M$ eine total-reelle Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ ist. Außerdem kann die Bedingung $S_k = S \cup \overline{W_k}$ holomorph-konvex aus Satz 3.9. und Korollar 3.9.' ersetzt werden durch die (schwächere) Bedingung: Für alle $k \in \mathbb{N}$ existieren für genügend kleines $\epsilon > 0$ Holomorphiegebiete $U_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$, so daß

$$(3.28) \quad T_{t\epsilon}(S) \cup \overline{W_{k+1}} \subset U_\epsilon \subset T_\epsilon(S) \cup W_k, \quad \text{wobei } t \in (0,1) \text{ fest.}$$

Offenbar kann dann (3.19) aus dem Beweis von Satz 3.9. durch (3.28) ersetzt werden. Nach Satz 2.6. erfüllen kompakte Teilmengen $S \subset \tilde{M}$, $\tilde{M}$ total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit, und beliebige $K_0 \subset S$ die Bedingung (3.28) .

Für die holomorphe Approximation auf kompakten $K \subset M$, M total-reelle Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$, gilt :

3.11. Korollar :

Sei M eine total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. C^∞ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ und sei $K \subset M \subset \mathbb{C}^n$ kompakt.

Zu $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ bzw. $C^\infty(M)$) existiert ein $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C}^n)$ bzw. $C^\infty(\mathbb{C}^n)$) mit $F|_K = f|_K$ und eine Folge $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}_+} \subset \mathcal{O}(K)$, so daß gilt :

$$(3.29) \quad \|F - h_j\|_{M_p, \bar{h}, K} = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq 2n}} \frac{|D^\alpha(F - h_j)(x)|}{\bar{h}^{|\alpha|} |M|^{|\alpha|}} \rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty, \quad ,$$

für ein geeignetes $\bar{h} > 0$ (bzw. für alle $\bar{h} > 0$, bzw. gilt für jedes fest vorgegebene $m \in \mathbb{N}$

$$(3.29') \quad \|F - h_j\|_{m, K} = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha(F - h_j)(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty) .$$

Bew.:

Benutze Korollar 1.10 und Bem. 1.13. anstelle von (3.17), (3.18) im Beweis von Satz 3.9. . Ersetzt man außerdem aufgrund von Satz 2.4. die Aussage (3.19) durch (2.1), so folgen völlig analog zum Beweis von Satz 3.9. und Korollar 3.9.' die Aussagen (3.29) und (3.29'). qed.

3.12. Bem.:

Falls $M \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. C^∞ -) Untermannigfaltigkeit, so folgt aus Korollar 3.11. für $K = M$ (oder auch aus Satz 3.9. bzw. Korollar 3.9.' für $K_0 = \emptyset$, $S = M$), daß die natürliche Abbildung $\mathcal{F}: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{F}: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$, bzw. $\mathcal{F}: \mathcal{O}(M) \rightarrow C^\infty(M)$) dichtes Bild hat. Vgl. hierzu auch Bem. 2.4.' . Der C^∞ -Fall für kompakte M wurde bereits von Nirenberg/Wells [36], Theorem 6.1. gelöst.

Um nun einen Satz über holomorphe Approximation auf beliebigen (ultra-)differenzierbaren total-reellen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^n$ zu erhalten, werden wir die Approximation zunächst lokal, d.h. für (ultra-)differenzierbare Funktionen f mit kompaktem Support in $M \cap U$ ($U \subset \mathbb{C}^n$ offene Umgebung von $x \in M$) ausführen und dann zeigen, daß für kompakte $\tilde{K} \subset M \cap U$ außerhalb des Supports von f die approximierende Folge holomorpher Funktionen sogar so gewählt werden kann, daß sie in der Topologie von $\mathcal{O}(\tilde{K})$ gegen 0 konvergiert (Satz 3.13). Zusammen mit dem Verschwinden der Kohomologiegruppen $H^1(\Omega, \mathcal{O})$ für die $\Omega \ni M$ aus der Umgebungsbasis $\mathcal{F}$ von M (siehe Satz 2.5.) ergibt sich ein einfacher Beweis für die globale Aussage (Satz 3.14).

3.13. Satz :

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$, dann hat jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ mit der Eigenschaft:

Falls $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap U)$) mit $\text{supp } f \subset M \cap U$ kompakt und $\tilde{K} \subset M \cap U$ kompakt mit $(\text{supp } f) \cap \tilde{K} = \emptyset$, dann existiert eine Folge $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}_+} \subset \mathcal{O}(M \cap U)$, so daß

$$(3.30) \quad \mathcal{P}(h_j) \rightarrow f \quad \text{in } \mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap U) \text{ (bzw. } \mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap U) \text{) und}$$

$$(3.31) \quad h_j \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{O}(\tilde{K}) \quad \text{für } j \rightarrow \infty, \text{ d.h. man kann sogar eine}$$

offene Menge $N \subset \mathbb{C}^n$ mit $N \supset \tilde{K}$ finden, so daß $h_j \in \mathcal{O}(N)$ für alle $j \in \mathbb{N}_+$ und $h_j \rightarrow 0$ gleichmäßig auf N .

Bew.:

Nach Satz 1.5. existiert zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene beschränkte Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{C}^n$ von x , so daß für $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap \tilde{U})$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap \tilde{U})$) mit $\text{supp } f \subset M \cap \tilde{U}$ kompakt ein $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{U})$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{U})$) existiert mit $F|_{M \cap \tilde{U}} = f$ und $D^\alpha \bar{\partial} F(x) = 0$ für alle $x \in M \cap \tilde{U}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen so, daß $\text{supp } f \subset M \cap U \subset \overline{M \cap U} \subset M \cap \tilde{U}$. Nach Bem. 1.9. kann F so gewählt werden, daß auch $\text{supp } F$ kompakt und $(\text{supp } F) \subset U$. Gilt außerdem für ein kompaktes $\tilde{K} \subset M \cap U$, daß $(\text{supp } f) \cap \tilde{K} = \emptyset$, so kann auch F so gewählt werden, daß $(\text{supp } F) \cap \tilde{K} = \emptyset$, ebenfalls nach Bem. 1.9. .

Für genügend kleines festes $\delta > 0$ gilt $F = 0$ auf $T_\delta(\tilde{K}) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, \tilde{K}) < \delta\} \subset \tilde{U}$. Nach Satz 2.6. gibt es ein a mit $0 < a \leq 1/2$ und für jedes ϵ mit $0 < \epsilon \leq \epsilon_0(\delta)$ ein Holomorphiegebiet $U_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$ mit

$$(3.32) \quad T_{(a/2)\epsilon}(\overline{M \cap U}) \cup T_{(a/2)\delta}(\tilde{K}) \subset U_\epsilon \subset T_\epsilon(\overline{M \cap U}) \cup T_\delta(\tilde{K}) .$$

Es folgt für $K := \overline{M \cap U} \cup \overline{T_{(a/4)\delta}(\tilde{K})}$ und $\epsilon \leq \min(\frac{1}{2}\delta, \epsilon_0(\delta))$, daß

$$(3.32') \quad T_{(a/2)\epsilon}(K) \subset U_\epsilon \subset T_\epsilon(\overline{M \cap U}) \cup T_\delta(\tilde{K}) .$$

Nun können wir (3.19) im Beweis von Satz 3.9. durch (3.32') ersetzen und erhalten völlig analog wie dort (für $\epsilon > 0$ so klein, daß $T_\epsilon(\overline{M \cap U}) \subset \tilde{U}$):

$$(3.33) \quad \sup_{\substack{x \in K \\ x \in \mathbb{R}^{2n}}} \frac{|D^\alpha g_\varepsilon(x)|}{(B_3 \cdot \bar{h})^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \leq C \cdot \tilde{C}_{\bar{h}} \cdot \varepsilon \rightarrow 0, \text{ falls } \varepsilon \rightarrow 0$$

für ein $\bar{h} > 0$ (bzw. für alle $\bar{h} > 0$), wobei $g_\varepsilon = F - h_\varepsilon$ auf U_ε und h_ε holomorph auf $U_\varepsilon \cap K$.

qed.

3.13' Bem.:

Die entsprechende Aussage folgt auch für C^∞ anstelle von $\mathcal{E}^{(M_p)}$ in Satz 3.13.; vgl. hierzu den Beweis von Korollar 3.9.'. Der C^∞ -Fall wurde bereits von Harvey/Wells [23], Theorem 1.4. bewiesen.

3.14. Satz:

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$, dann gilt:

Die natürliche Abbildung $\mathcal{F}: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{F}: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$)

hat dichtes Bild. Es existiert sogar ein Holomorphiegebiet $U_0 \subset \mathbb{C}^n$ mit $U_0 \supset M$, so daß die kanonische Restriktion $\mathcal{F}: \mathcal{O}(U_0) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{F}: \mathcal{O}(U_0) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) dichtes Bild hat.

Bew.:

Sei $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$), wir nehmen zunächst an, daß $(\text{supp } f)$

$\subset M \cap V \subset \overline{M \cap V} \subset M \cap W \subset \overline{M \cap W} \subset M \cap U$ für $V, W, U \subset \mathbb{C}^n$ offen und be-

schränkt mit $\bar{V} \subset W \subset \bar{W} \subset U$, dabei sei U Umgebung von $x \in M$ so, daß Satz 3.13. gilt. Es existiert also eine Folge $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}_+} \subset \mathcal{O}(M \cap U)$ mit

$$(3.30') \quad \mathcal{F}(h_j) \rightarrow f \text{ in } \mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap U) \text{ (bzw. } \mathcal{E}^{(M_p)}(M \cap U) \text{) und}$$

$$(3.31') \quad h_j \rightarrow 0 \text{ in } \overline{\mathcal{O}(M \cap (W \setminus \bar{V}))}, \text{ es kann sogar eine offene Umge-}$$

bung $N \subset \mathbb{C}^n$ von $\overline{M \cap (W \setminus \bar{V})}$ gefunden werden, so daß $h_j \in \mathcal{O}(N)$ für alle $j \in \mathbb{N}_+$ und $h_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{O}(N)$.

Seien $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\tilde{U}_1 \supset (M \cap \bar{V})$ sowie $\tilde{U}_2 \supset (M \setminus W)$ mit $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$, dann ist $U_1 := \tilde{U}_1 \cup N$ Umgebung von $M \cap W$ und $U_2 := \tilde{U}_2 \cup N$ Umgebung von $M \setminus \bar{V}$ und es gilt

$$(3.34) \quad (U_1 \cup U_2) \supset M \quad \text{und} \quad U_1 \cap U_2 = N.$$

Da nach Satz 2.5. die total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit M eine Umgebungsbasis aus Holomorphiegebieten besitzt, existiert also ein Holomorphiegebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mit $M \subset \Omega \subset U_1 \cup U_2$. Mit $\Omega_1 := \Omega \cap U_1$, $\Omega_2 := \Omega \cap U_2$ gilt dann die Zerlegung

$$(3.35) \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \text{und} \quad \text{au\ss} \text{erdem} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 \subset N.$$

Wegen $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ ist dann das Cousin I - Problem lösbar, d.h. die stetige Abbildung

$$(3.36) \quad s: \mathcal{O}(\Omega_1) \times \mathcal{O}(\Omega_2) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad \text{mit} \quad s(f_1, f_2) = f_1 - f_2 \quad \text{für}$$

$f_1 \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ ist surjektiv. Da $\mathcal{O}(\Omega_1) \times \mathcal{O}(\Omega_2)$ und $\mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ Frécheträume sind, ist nach dem Satz von der offenen Abbildung s auch offen. Da für die Folge $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}_+}$ nach (3.31') gilt, daß $h_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{O}(N)$, also insbesondere auch in $\mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, existiert damit eine Folge $\{h_j^{(1)}\}_{j \in \mathbb{N}_+} \subset \mathcal{O}(\Omega_1)$ und eine Folge $\{h_j^{(2)}\}_{j \in \mathbb{N}_+} \subset \mathcal{O}(\Omega_2)$ mit

$$(3.37) \quad h_j = s(h_j^{(1)}, h_j^{(2)}) = h_j^{(1)} - h_j^{(2)} \quad \text{und} \quad h_j^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{in}$$

$\mathcal{O}(\Omega_1)$ sowie $h_j^{(2)} \rightarrow 0$ in $\mathcal{O}(\Omega_2)$. Damit ist die Funktion h_j^* , $j \in \mathbb{N}_+$, mit

$$(3.38) \quad h_j^* := \begin{cases} h_j - h_j^{(1)} & \text{nahe } M \cap W \\ -h_j^{(2)} & \text{nahe } M \setminus \bar{V} \end{cases}$$

ein wohldefiniertes Element von $\mathcal{O}(M)$ und $\mathcal{F}(h_j^*)$ konvergiert gegen f in der Topologie von $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$).

Sei nun $\{\chi_i\}_{i \in I}$ eine Zerlegung der Eins in $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ bzgl. einer lokal-finiten Überdeckung von M mit Mengen $M \cap U_i$, $i \in I$, wobei $U_i \subset \mathbb{C}^n$ offene Umgebung von $x_i \in M$ wie in Satz 3.13. . Es gilt also $\sum_{i \in I} \chi_i(x) = 1$

für $x \in M$, $0 \leq \chi_i(x) \leq 1$ und $(\text{supp } \chi_i) \subset M \cap U_i$ kompakt. Falls nun

$f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) kompakten Support hat, existiert eine

endliche Teilmenge I_0 von I , so daß $f = \sum_{i \in I_0} x_i \cdot f$. Wende nun die obige Konstruktion bis (3.38) auf $x_i \cdot f$ an, so folgt, daß auch f durch $\rho(\tilde{h}_j)$, $\tilde{h}_j \in \mathcal{O}(M)$, approximiert werden kann in $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$). Da aber die Funktionen mit kompaktem Support dicht liegen in $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) (dies folgt aus der Definition in (1.4) und Komatsu [29], Prop. 5.10.), folgt die Behauptung, daß $\rho: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\rho: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$) dichtes Bild hat. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 2.5. (ii) und (ii') .

QED.

3.14.' Bem.:

Die entsprechende Aussage folgt natürlich wieder für C^∞ anstelle von $\mathcal{E}^{(M_p)}$ in Satz 3.14., vgl. hierzu Bem. 3.13.' und den Beweis von Korollar 3.9.' . Der C^∞ -Fall wurde bereits von Harvey/Wells [23], Theorem 3.1. (vgl. auch Range/Siu [43], Theorem 1) bewiesen.

Für den Hinweis zum Beweis des folgenden Beispiels einer Menge $S \subset \mathbb{C}^2$, die die Voraussetzungen von Satz 3.9. erfüllt, danken wir herzlich P. Pflug [41a] .

3.15. Beispiel : (Das Atomium ist holomorph-konvex)

Seien $B_1, \dots, B_m \subset \mathbb{C}^2$ paarweise disjunkte abgeschlossene Kugeln der Form $B_j := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z - a_j| \leq r_j\}$, $a_j \in \mathbb{C}^2$, $r_j > 0$ für $j=1, \dots, m$, und $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^2$. Seien $T_1, \dots, T_\ell$ paarweise disjunkte Verbindungslinien der Form $T_q := T_{q(i,j)} := \{t \cdot a_i + (1-t)a_j \mid t \in (0,1)\}$ für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $T_{q(i,j)} \cap B_k = \emptyset$ für $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$.

Wir behaupten, daß die kompakte Menge $S := (B_1 \cup \dots \cup B_m \cup T_1 \cup \dots \cup T_\ell)$ eine Umgebungsbasis aus Holomorphiegebieten hat, d.h. holomorph-konvex ist. Zunächst zeigen wir dazu, daß die Menge $S_{(1,0)} := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| \leq 1\} \cup \{s \cdot (1,0) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < s \leq s_0\}$, $s_0 > 1$ fest, eine Umgebungsbasis aus Holomorphiegebieten besitzt.

Es sei $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $z_j = x_j + iy_j$, $j=1, 2$. Definiere zu $0 < \varepsilon \leq 1/2$ die Funktion $\varphi_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$(3.39) \quad \varphi_\varepsilon(x_1) := 1 + \varepsilon^6 - x_1^2 \quad \text{für } x_1 \leq 1 - \varepsilon; \quad \varphi_\varepsilon(x_1) := 2\varepsilon^6 \quad \text{für } x_1 \geq 1 + \varepsilon;$$

sowie $\Psi_\epsilon(x_1) :=$

$$\frac{1}{16\epsilon^3} \left((-1+3\epsilon^4)(x_1-1-\epsilon)^5 + (-2-5\epsilon+15\epsilon^5)(x_1-1-\epsilon)^4 + (-8\epsilon-4\epsilon^2+20\epsilon^6)(x_1-1-\epsilon)^3 \right) + 2\epsilon^6 \quad \text{für } 1-\epsilon < x_1 < 1+\epsilon.$$

$\Psi_\epsilon|_{(1-\epsilon, 1+\epsilon)}$ ist das eindeutig bestimmte Polynom 5. Grades, das

$\Psi_\epsilon|_{\mathbb{R} \setminus (1-\epsilon, 1+\epsilon)}$ zu einer C^2 -Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzt.

Definiere nun die Funktion $u_\epsilon \in C^2(\mathbb{C}^2)$ durch

$$(3.40) \quad u_\epsilon(z) = y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - \Psi_\epsilon(x_1) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^2.$$

Wir zeigen, daß die offene Menge $U_\epsilon := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid u_\epsilon(z) < 0\}$ pseudokonvex ist für genügend kleines $\epsilon > 0$, indem wir nachweisen, daß die Levi-Bedingung erfüllt ist, d.h. für $z \in \partial U_\epsilon$ gilt

$$(3.41) \quad \text{grad } u_\epsilon(z) \neq 0 \quad \text{und}$$

$$(3.42) \quad \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} u_\epsilon(z) w_j \bar{w}_k \geq 0 \quad \text{für } w_1, w_2 \in \mathbb{C}^2 \text{ mit}$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial z_j} u_\epsilon(z) w_j = 0, \quad \text{vgl. Hörmander [25], Theorem 2.6.12.}$$

Zunächst gilt für $z \in \partial U_\epsilon$, daß

$$(3.41') \quad \text{grad } u_\epsilon(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} u_\epsilon(z), \frac{\partial}{\partial z_2} u_\epsilon(z) \right) = \left(-\frac{1}{2} \Psi'_\epsilon(x_1) - iy_1, x_2 - iy_2 \right)$$

$\neq (0,0)$, da $y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \Psi_\epsilon(x_1) > 0$ für $x_1 > -(1+\epsilon^6)^{1/2}$ und

$$\Psi'_\epsilon(x_1) \neq 0 \quad \text{für } x_1 = -(1+\epsilon^6)^{1/2}.$$

Die Gleichung

$$(3.43) \quad \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial z_j} u_\epsilon(z) w_j = 0 \quad \text{wird genau erfüllt von } (w_1, w_2) \in$$

$\{a(x_2 - iy_2, \frac{1}{2} \Psi'_\epsilon(x_1) + iy_1) \mid a \in \mathbb{C}\}$ zu vorgegebenem $z \in \partial U_\epsilon$.

$$\text{Es ist } \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} u_\epsilon(z) = -\frac{1}{4} \Psi''_\epsilon(x_1) + \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} u_\epsilon(z) = 1 \quad \text{und}$$

$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2} u_\epsilon(z) = \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_1} u_\epsilon(z) = 0$, somit ist nach (3.42) für $z \in \partial U_\epsilon$ und

(w_1, w_2) aus (3.43) zu zeigen, daß

$$(3.44) \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \Psi_\epsilon''(x_1) + \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(3.44') \quad |z_2|^2 (-\Psi_\epsilon''(x_1) + 2) + (\Psi_\epsilon'(x_1))^2 + 4y_1^2 \geq 0.$$

Wir zeigen $(x_2^2 + y_2^2)(\Psi_\epsilon''(x_1) - 2) \leq (\Psi_\epsilon'(x_1))^2$, indem gezeigt wird, daß

$$(3.45) \quad \Psi_\epsilon(x_1) (\Psi_\epsilon''(x_1) - 2) \leq (\Psi_\epsilon'(x_1))^2 \quad \text{für alle } x_1 \in \mathbb{R}, \text{ so daß}$$

$z \in \partial U_\epsilon$, $\epsilon > 0$ genügend klein, daraus folgt offenbar (3.44).

Da $\Psi_\epsilon''(x_1) \leq 0$ für $x_1 \in \mathbb{R} \setminus (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ und $\Psi_\epsilon(x_1) \geq 0$ für $z \in \partial U_\epsilon$, gilt

$$(3.45) \text{ trivialerweise auf } \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -(1+\epsilon)^{6/2}\} \setminus (1-\epsilon, 1+\epsilon).$$

Wir stellen nun fest, daß für $\epsilon > 0$ genügend klein gilt, daß $\Psi_\epsilon'(x_1) < 0$ auf $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$, woraus folgt, daß $\Psi_\epsilon(x_1)$ monoton fallend auf $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$

ist. Außerdem ist $\Psi_\epsilon''(x_1) \geq -2$ auf $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$, da $\Psi_\epsilon'''(1-\epsilon) > 0$ und $\Psi_\epsilon'''(1+\epsilon) < 0$. Es folgt, daß $1 - x_1^2 < 1 + \epsilon^6 - x_1^2 \leq \Psi_\epsilon(x_1)$ für $x_1 \in (1-\epsilon, 1)$.

Damit folgt zusammen mit der Definition von U_ϵ , daß mit $H_\epsilon := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re} z_1 < s_0 + \epsilon\}$, $s_0 > 1$ fest, gilt:

$$(3.46) \quad S_{(1,0)} \subset (U_\epsilon \cap H_\epsilon) \quad \text{für } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \quad \text{und } \{U_\epsilon \cap H_\epsilon\}_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \text{ ist}$$

eine Umgebungsbasis von $S_{(1,0)}$.

Es gilt nun für $x_1 \in (1-\epsilon, 1-\epsilon/2]$, daß $\Psi_\epsilon''(x_1) \leq \Psi_\epsilon''(1-\epsilon/2)$, da

$\Psi_\epsilon'''(1-\epsilon/2) > 0$, außerdem ist $(\Psi_\epsilon''(1-\epsilon/2) - 2) \leq (9/(8\epsilon) - 3)$ sowie $\Psi_\epsilon'(1-\epsilon/2) \leq (\epsilon-3/2)$. Da $\Psi_\epsilon(x_1) \leq 2\epsilon$ und da $\Psi_\epsilon'(x_1) \leq \Psi_\epsilon'(1-\epsilon/2)$, falls $\Psi_\epsilon''(x_1) > 0$, gilt (3.45) auch für $x_1 \in (1-\epsilon, 1-\epsilon/2]$.

Außerdem ist für $x_1 \in [1+\epsilon-(\epsilon^2/2), 1+\epsilon)$ $\Psi_\epsilon''(x_1) \leq \Psi_\epsilon''(1+\epsilon-(\epsilon^2/2))$, da $\Psi_\epsilon'''(x_1) < 0$ und es ist $\Psi_\epsilon''(1+\epsilon-(\epsilon^2/2)) < 2$, so daß (3.45) auch für $x_1 \in [1+\epsilon-(\epsilon^2/2), 1+\epsilon)$ gilt.

Es bleibt (3.45) nachzuweisen für $x_1 \in [1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon-(\varepsilon^2/2)]$, wir setzen zur Vereinfachung $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x) := 16\varepsilon^3 \cdot \varphi_\varepsilon(x+1+\varepsilon)$, dann gilt für $x \in [-(3/2)\varepsilon, -(\varepsilon^2/2)]$:

$$(3.47) \quad \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \leq -x^3(2x+8\varepsilon+C_1\varepsilon^2) + C_2\varepsilon^9$$

$$(3.47') \quad \tilde{\varphi}_\varepsilon'(x) \leq -x(24x+48\varepsilon+C_3\varepsilon^2) \quad \text{sowie}$$

$$(3.47'') \quad \tilde{\varphi}_\varepsilon''(x) \leq -x^2(8x+24\varepsilon-C_4\varepsilon^2),$$

hierbei seien $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$ und $C_4 > 0$ Konstanten; insbesondere sei $\varepsilon > 0$ so klein, daß in (3.47'') gilt, daß $(8x+24\varepsilon-C_4\varepsilon^2) > 0$. Wegen $\tilde{\varphi}_\varepsilon'(x) < 0$ folgt aus (3.47''), daß

$$(3.47''') \quad (\tilde{\varphi}_\varepsilon'(x))^2 \geq x^4(8x+24\varepsilon)^2 - x^4C_5\varepsilon^3 \quad \text{für } C_5 > 0 \text{ konstant.}$$

Damit folgt für genügend kleines $\varepsilon > 0$, daß für Konstanten $C_6 > 0$, $C_7 > 0$:

$$(3.48) \quad \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \cdot \tilde{\varphi}_\varepsilon''(x) \leq x^4(2x+8\varepsilon)(24x+48\varepsilon) + x^4C_6\varepsilon^3 + C_7\varepsilon^{11} \leq (\text{da } x \geq -(3/2)\varepsilon) \\ x^4(8x+24\varepsilon)^2 - x^448\varepsilon^2 + x^4C_6\varepsilon^3 + C_7\varepsilon^{11} \leq (\tilde{\varphi}_\varepsilon'(x))^2,$$

nach (3.47''') und wegen $x \leq -(\varepsilon^2/2)$, d.h. $16x^4 > \varepsilon^8$.

Aus (3.48) folgt offenbar (3.45) für $x_1 \in [1-\varepsilon/2, 1+\varepsilon-(\varepsilon^2/2)]$, damit gilt (3.45) für alle $x_1 \in \mathbb{R}$, so daß $z \in \partial U_\varepsilon$.

Also ist $U_\varepsilon \subset \mathbb{C}^2$ pseudokonvex für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, und mit (3.46) folgt, da offenbar H_ε und damit auch $U_\varepsilon \cap H_\varepsilon$ pseudokonvex, daß $S_{(1,0)}$ holomorph-konvex ist.

Außerdem ist für $a=(a_1, a_2) \in \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1\}$ die Menge $S_a := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| \leq 1\} \cup \{s \cdot (a_1, a_2) \mid 0 < s \leq s_0\}$, $s_0 > 1$ fest, holomorph-konvex, da S_a das Bild von $S_{(1,0)}$ unter der $\mathbb{C}$ -linearen invertierbaren (also insbesondere bi-holomorphen) Abbildung f_a ist, die $(1,0)$ in (a_1, a_2) und $(0,1)$ in $(-a_2, a_1)$ überführt. Für $b_1, \dots, b_p \in \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1\}$ ist die Menge $S_{b_1} \cup \dots \cup S_{b_p}$ ebenfalls holomorph-konvex, denn mit $U_{\varepsilon, b_j} := f_{b_j}(U_\varepsilon \cap H_\varepsilon)$

sind auch die $U_{\varepsilon, b_1} \cup \dots \cup U_{\varepsilon, b_p}$ Holomorphiegebiete für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

da für $i, j \in \{1, \dots, p\}$ gilt, daß $(U_{\varepsilon, b_i} \setminus U_{\varepsilon, b_j}) \cap (U_{\varepsilon, b_j} \setminus U_{\varepsilon, b_i}) = \emptyset$,
(vgl. Pflug [41], II, 2.9.) .

Damit ist $\{U_{\varepsilon, b_1} \cup \dots \cup U_{\varepsilon, b_p} \mid 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ Umgebungsbasis von $S_{b_1} \cup \dots \cup S_{b_p}$
aus Holomorphiegebieten. Offenbar sind auch Streckungen der Menge

$S_{b_1} \cup \dots \cup S_{b_p}$ holomorph-konvex. Aus Satz 2.7. folgt nun, daß auch

$S := (B_1 \cup \dots \cup B_m \cup T_1 \cup \dots \cup T_\ell) \subset \mathbb{C}^2$ holomorph-konvex ist.

Man beachte, daß $S = (B_1 \cup \dots \cup B_m \cup T_1 \cup \dots \cup T_\ell)$ auch die Voraussetzung

von Satz 3.9. erfüllt, wähle nämlich $W_k := B_1^k \cup \dots \cup B_m^k$, wobei $B_j^k := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z - a_j| < r_j + C(1/(k+1))\}$ und $C > 0$ genügend klein, so daß die $\overline{B_j^k}$,
 $1 \leq j \leq m$, paarweise disjunkt bleiben für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir bemerken noch, daß für $\tilde{B}_j := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z - a_j| \leq r_j, \operatorname{Im} z_2 = 0\}$
mit $a_j = (a_{1,j}, a_{2,j}) \in \mathbb{C}^2$ und $\operatorname{Im} a_{2,j} = 0$, $r_j > 0$ für $1 \leq j \leq m$, die
Menge $\tilde{S} := (\tilde{B}_1 \cup \dots \cup \tilde{B}_m \cup T_1 \cup \dots \cup T_\ell)$ ebenfalls holomorph-konvex ist.

Da $G_\varepsilon := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |\operatorname{Im} z_2| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, Holomorphiegebiet ist,
gilt: Wenn $\{V_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ Umgebungsbasis von S aus Holomorphiegebieten

$V_\varepsilon \subset \mathbb{C}^2$, so ist $\{V_\varepsilon \cap G_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ Umgebungsbasis aus Holomorphiegebieten
von $\tilde{S}$.

Abschließend sei bemerkt, daß natürlich auch jedes biholomorphe Bild

von $S = (B_1 \cup \dots \cup B_m \cup T_1 \cup \dots \cup T_\ell)$ holomorph-konvex ist.

Kapitel II : Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls

Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbb{C}$ mit Einselement e und seien $a_1, \dots, a_n \in A$. Für das gemeinsame Spektrum $\sigma(a)$ von $a = (a_1, \dots, a_n)$ gelte $\sigma(a) \subset M$, wobei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle $\mathcal{L}^{(Mp)}$ -Untermannigfaltigkeit, bzw. gelte $\sigma(a) \subset S$, wobei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt wie in Satz 3.9. .

Unter Benutzung der im vorangegangenen Kapitel bewiesenen Sätze stellen wir nun in §5 bzw. §6 eine Methode vor, den holomorphen Funktionalkalkül für $a = (a_1, \dots, a_n)$ auf die Algebra $\mathcal{L}^{(Mp)}(M)$ bzw. $\mathcal{L}^{(Mp)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ eindeutig (stetig, linear und multiplikativ) fortzusetzen, falls die

Differentialform $\omega := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bar{\partial} u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\bar{\partial} u_j} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} u_n$ (wobei

$u_1, \dots, u_n \in C^\infty(\mathbb{C}^n \setminus \sigma(a), A)$ mit $\sum_{j=1}^n (z_j - a_j) u_j(z) = e$) ein gewisses

exponentielles Wachstum bei Annäherung an M nicht überschreitet. Hierzu benötigen wir zusätzlich eine in §4 bewiesene Formel für den holomorphen Funktionalkalkül in n Variablen (A -wertige Cauchy-Fantappiè-Koppelman Formel). Wir entwickeln dann ein in (5.14) bzw. (6.11) beschriebenes Faktorisierungsprinzip, (zu diesem vergleiche man auch die Bemerkungen von Gramsch in [18], 6.1. und [19], 4.1.).

Außerdem zeigen wir in §4, daß die oben genannte Wachstumsbedingung für ω durch eine punktweise Bedingung an solche Elemente $b_1^z, \dots, b_n^z$,

$z \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma(a)$, mit $\sum_{j=1}^n (z_j - a_j) b_j^z = e$ abgeschwächt werden kann.

Ersetzt man die exponentielle Wachstumsbedingung für ω durch eine polynomiale, so kann $\mathcal{L}^{(Mp)}$ durch C^∞ ersetzt werden, (vgl. Satz 5.3. und Satz 6.3.).

Schließlich zeigen wir, daß die von uns bewiesenen Sätze auch für n -Tupel kommutierender Operatoren $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, das Taylor-Spektrum $\sigma(a_1, \dots, a_n, X)$ und den holomorphen Funktionalkalkül von J.L. Taylor anwendbar sind, (siehe Bem. 4.12.).

Das Kapitel wird durch einige Bemerkungen zu Anwendungen und Beispielen ergänzt.

§ 4. Der holomorphe Funktionalkalkül in mehreren Variablen für kommutative Banachalgebren und der Funktionalkalkül von J.L. Taylor

In diesem Paragraphen sei A stets eine kommutative Banachalgebra über $\mathbb{C}$ mit Einselement e und Norm $\| \cdot \|_A$. Für $a_1, \dots, a_n \in A$ sei $a = (a_1, \dots, a_n)$ und

$$(4.1) \quad \sigma(a) := \{ (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \in \mathbb{C}^n \mid \varphi \in \Delta(A) \}$$

bezeichne das gemeinsame Spektrum von $a = (a_1, \dots, a_n)$, hierbei sei $\Delta(A)$ der Raum der multiplikativen stetigen linearen Funktionale $\neq 0$ auf A . Es gilt, daß $\sigma(a) \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und nichtleer ist und

$$(4.1') \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma(a) \Leftrightarrow \exists b_1, \dots, b_n \in A \text{ mit } \sum_{j=1}^n (z_j - a_j) b_j = e,$$

hierbei schreiben wir wie im folgenden anstatt $z_j \cdot e$ einfach z_j , falls keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Der folgende wichtige Satz wurde für endlich erzeugte Algebren A von Shilov [49], sowie allgemein von Waelbroeck [55] und Arens/Calderón [6] bewiesen:

4.1. Satz :

Sei A eine kommutative Banachalgebra mit e . Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ und $a_1, \dots, a_n \in A$ existiert ein stetiger Algebrehomomorphismus $\phi_a: \mathcal{O}(\sigma(a)) \rightarrow A$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, mit den Eigenschaften :

$$(4.2) \quad \phi_a(\underline{z}_j) = a_j \text{ für } 1 \leq j \leq n \text{ und } \phi_a(\underline{1}) = e, \text{ hierbei bezeichnen } \underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n \text{ die Funktionskeime auf } \sigma(a) \text{ der Koordinatenfunktionen in } \mathbb{C}^n \text{ und } \underline{1} \text{ den Funktionskeim auf } \sigma(a) \text{ der konstanten Einsfunktion.}$$

$$(4.3) \quad \text{Falls } F \in \mathcal{O}(U), U \subset \mathbb{C}^n \text{ offen mit } U \supset \sigma(a) \text{ und falls für } p \in \mathbb{N}_+ \text{ } a_{n+1}, \dots, a_{n+p} \in A, \text{ dann gilt für die Fortsetzung } \tilde{F} \in \mathcal{O}(U \times \mathbb{C}^p) \text{ von } F \text{ mit}$$

$$\tilde{F}(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+p}) := F(z_1, \dots, z_n), \quad (z_1, \dots, z_{n+p}) \in U \times \mathbb{C}^p,$$

$$\text{daß } \phi_{(a_1, \dots, a_{n+p})}(\tilde{F}) = \phi_{(a_1, \dots, a_n)}(F).$$

ϕ_a heißt holomorpher Funktionalkalkül für $a_1, \dots, a_n \in A$.

Bew.:

Siehe Bourbaki [9], Chap. I, §4 und Gamelin [16], Chap. III, Sec. 4-5.

4.2. Bem.:

Die Familie (ϕ_a) , $a \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A^n)$, wird durch die obigen Bedingungen eindeutig bestimmt, (siehe Gamelin [16], Chap. III, Sec. 4-5), der Eindeutigkeitsbeweis benutzt das folgende Lemma:

4.3. Lemma (Arens-Calderón Trick) :

Sei A eine kommutative Banachalgebra mit e , $a_1, \dots, a_n \in A$ und sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $\sigma(a_1, \dots, a_n) \subset U$.

Dann existiert ein $p \in \mathbb{N}$ und Elemente $a_{n+1}, \dots, a_{n+p} \in A$, so daß für die polynomkonvexe Hülle $\widehat{G}(a_1, \dots, a_{n+p})$ von $\sigma(a_1, \dots, a_{n+p})$ in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ und die kanonische Projektion π von $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ auf $\mathbb{C}^n$ gilt

$$(4.4) \quad \pi(\widehat{G}(a_1, \dots, a_{n+p})) \subset U.$$

Bew.:

Siehe Bourbaki [9], Chap. I, §4, Lemme 10 oder Gamelin [16], Chap. III, Lemma 5.2.

Aufgrund von Bem. 4.2. sprechen wir im folgenden von dem holomorphen Funktionalkalkül.

4.4. Bem.:

Sei A eine kommutative Banachalgebra mit e und $a_1, \dots, a_n \in A$, wobei $n \in \mathbb{N}_+$ fest. Falls $\sigma(a_1, \dots, a_n)$ polynomkonvex ist, dann ist $\phi(a_1, \dots, a_n)$ der einzige stetige Algebromorphismus von $\mathcal{O}(\sigma(a_1, \dots, a_n))$ nach A , der (4.2) erfüllt.

Bew.:

Siehe Bourbaki [9], Chap. I, §4, Prop. 6, der Beweis beruht auf der Dichtheit der Polynome (in $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$) in $\mathcal{O}(K)$ für polynomkonvexe $K \subset \mathbb{C}^n$.

4.5. Bem.:

Aus (4.1') folgt mithilfe einer Zerlegung der Eins-Arguments (siehe Bourbaki [9], Chap. I, §4, Lemme 1, vgl. auch den Beweis von Bem. 4.9. unten), daß zu $a_1, \dots, a_n \in A$ Funktionen $u_1, \dots, u_n \in C^\infty(\mathbb{C}^n \setminus \sigma(a), A)$ existieren mit

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^n (z_j - a_j) u_j(z) = e \quad \text{für alle } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma(a).$$

Wir bemerken, daß die $u_1(z), \dots, u_n(z)$ im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sind, jedoch ist für $n=1$ natürlich stets $u_1(z) = (z - a_1)^{-1}$.

Sei nun $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt mit $\sigma(a) \subset K$ und f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ von K . Sei $h \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ mit $h \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von K und $(\text{supp } h) \subset U$. Definiere die Funktionen $v_j \in C^\infty(\mathbb{C}^n, A)$, $j=1, \dots, n$, durch

$$(4.6) \quad v_j(z) := \begin{cases} (1-h(z)) \cdot u_j(z) & \text{falls } z \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma(a) \\ 0 & \text{falls } z \in \sigma(a) \end{cases}$$

Dann ist der holomorphe Funktionalkalkül für $a=(a_1, \dots, a_n)$ (bzgl. $\mathcal{O}(U)$) aus Satz 4.1. definiert durch

$$(4.7) \quad \phi_a(f) := \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int_U f(z) \, dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

und diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der $u_1, \dots, u_n$ und von h , sowie von U (siehe Bourbaki [9], Chap. I, §4.3.).

Wie üblich definiert man für (Banachraum-wertige) C^∞ -Funktionen f auf $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen den Operator d der äußeren Differentiation durch

$$(4.8) \quad df := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j, \quad \text{wobei die Koordinaten } z_j, 1 \leq j \leq n,$$

in $\mathbb{C}^n$ als $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq n$, geschrieben sind.

Ebenso definiert man die Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$ durch

$$(4.9) \quad \partial f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \quad \text{und} \quad \bar{\partial} f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j, \quad \text{wobei}$$

$$(4.10) \quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

In üblicher Weise definiert man die linearen Operatoren d , ∂ und $\bar{\partial}$ nun für k -Formen, $k \in \mathbb{N}_+$, bzw. für Formen vom Typ $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, (vgl. z.B. Wermer [59], Kap. 4 und 5).

Wir bemerken noch, daß gilt

$$(4.11) \quad d^2 = 0, \quad \partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0 \quad \text{sowie}$$

$$(4.11') \quad d = \partial + \bar{\partial}, \quad \text{insbesondere also } d = \bar{\partial} \text{ modulo } dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

$$(4.11'') \quad d\bar{z}_j \wedge dz_j = 2i \, dx_j \wedge dy_j, \quad j=1, \dots, n$$

Außerdem legen wir die Orientierung auf $\mathbb{C}^n$ durch die Festsetzung

$$(4.11''') \quad \int_{\sigma} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n > 0, \quad \sigma \text{ Standardsimplex im } \mathbb{R}^{2n}(\cong \mathbb{C}^n), \text{ fest.}$$

Wir stellen schließlich noch fest, daß gilt: f holomorph auf $\Omega \Leftrightarrow \bar{\partial}f=0$.

Wir wollen nun $\phi_a(f)$, $f \in \mathcal{O}(U)$, aus (4.7) auf eine andere Weise schreiben und formen dazu die rechte Seite von (4.7) um. Zunächst das folgende einfache (und bekannte) Lemma:

4.6. Lemma :

Seien $v_1, \dots, v_n \in C^\infty(\mathbb{C}^n, A)$ und $h \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ wie in Bem. 4.5. definiert, d.h. es gilt

$$(4.12) \quad \sum_{j=1}^n (z_j - a_j) v_j(z) + h(z) = e \quad \text{für } z=(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \text{ (mit der}$$

Schreibweise $h(z)$ für $h(z) \cdot e$), dann folgt, daß

$$(4.13) \quad \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n = 0 \quad \text{auf } \mathbb{C}^n \setminus \text{supp } h, \text{ d.h.}$$

$$\text{supp}(\bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n) \subset \text{supp } h \subset U.$$

Bew.:

Anwendung von $\bar{\partial}$ auf (4.12) ergibt für $z=(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, daß

$$(4.14) \quad \sum_{j=1}^n (z_j - a_j) \bar{\partial} v_j + \bar{\partial} h = 0.$$

Aus (4.12) folgt zunächst, daß

$$(4.15) \quad \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n = \left(\sum_{j=1}^n (z_j - a_j) v_j + h \right) \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n (z_j - a_j) v_j \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n + h \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n \\
&= (z_1 - a_1) v_1 \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n + \dots + \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_{i-1} (z_i - a_i) v_i \bar{\partial} v_i \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n + \\
&\quad \dots + \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_{n-1} (z_n - a_n) v_n \bar{\partial} v_n + h \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n
\end{aligned}$$

Aus (4.14) folgt $(z_i - a_i) \bar{\partial} v_i = -\bar{\partial} h - \sum_{j \neq i, j=1}^n (z_j - a_j) \bar{\partial} v_j$, daraus folgt

$$\begin{aligned}
(4.16) \quad &\bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_{i-1} \wedge (v_i (z_i - a_i) \bar{\partial} v_i) \wedge \bar{\partial} v_{i+1} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n = \\
&\bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_{i-1} \wedge (-v_i \bar{\partial} h) \wedge \bar{\partial} v_{i+1} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n
\end{aligned}$$

Einsetzen von (4.16) in (4.15) ergibt

$$\begin{aligned}
(4.13') \quad &\bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n = (-v_1 \bar{\partial} h) \wedge \bar{\partial} v_2 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n + \dots + \\
&\bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_{i-1} \wedge (-v_i \bar{\partial} h) \wedge \bar{\partial} v_{i+1} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n + \dots + \\
&\bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_{n-1} \wedge (-v_n \bar{\partial} h) + h \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n = 0
\end{aligned}$$

auf $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } h$.

qed.

Wir kommen nun zu der Umformung von ϕ_a aus (4.7) :

4.7. Satz :

Es sei $a_1, \dots, a_n \in A$ und $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt mit $\sigma(a) \subset K$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, außerdem sei $V \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $K \subset V$. Sei $\epsilon_0 > 0$ so klein, daß

$K_{\epsilon_0} := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) \leq \epsilon_0\} \subset V$ und sei $y \in C^\infty(V)$ fest mit $y \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von K sowie $(\text{supp } y) \subset K_{\epsilon_0} \subset V$.

Dann gilt für $f \in C^\infty(V)$ sowie f holomorph auf einer offenen Umgebung von K und den holomorphen Funktionalkalkül aus (4.7), daß

$$(4.17) \quad \phi_a(f) = - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus K} \bar{\partial}(f \cdot y) \wedge \left(\prod_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bar{\partial} u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\bar{\partial} u_j} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} u_n \right) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

Hierbei bedeutet ' $\widehat{}$ ' das Weglassen des entsprechenden Terms.

Wegen $\text{supp } \bar{\partial}(f \cdot y) \subset V \setminus K$ kann die Integration auch über $\mathbb{C}^n$ ausgeführt werden.

Im folgenden bezeichnen wir mit ω die $(0, n-1)$ -Form

$$(4.18) \quad \omega := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bar{\partial} u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\bar{\partial} u_j} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} u_n \quad \text{auf } \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{C}(a).$$

(Wir bemerken dazu, daß für $n=1$ gilt: $\omega(z) = u_1(z) = (z-a_1)^{-1}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}(a_1)$.)

Bew.:

Wähle eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ von K so, daß f holomorph auf U und $y \equiv 1$ auf U . Dann folgt aus (4.7) wegen $d = \bar{\partial} \bmod dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, siehe (4.11') und da $y \equiv 1$ auf U , daß

$$\begin{aligned} (4.19) \quad \phi_a(f) &= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int_U f \, dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int_U f \, \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int_U (f \cdot y) \, \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus K} (f \cdot y) \, \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, \end{aligned}$$

die letzte Gleichung gilt, da nach Lemma 4.6. $\bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n = 0$ auf $V \setminus U$, ebenso auf einer offenen Umgebung von K , da dort $v_j \equiv 0$ für

$j=1, \dots, n$. Definiere die $(0, n-1)$ -Form $\tilde{\omega} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v_j \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\bar{\partial} v_j} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n$

(' $\wedge$ ' bedeutet wieder das Weglassen des entsprechenden Terms), dann gilt:

$$(4.20) \quad \bar{\partial} \tilde{\omega} = \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} v_n \quad \text{und es folgt}$$

$$\begin{aligned} (4.19') \quad \phi_a(f) &= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus K} (f \cdot y) \, \bar{\partial} \tilde{\omega} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = \\ &= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \left(\int_{V \setminus K} \bar{\partial} (f \cdot y \tilde{\omega}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n - \int_{V \setminus K} \bar{\partial} (f \cdot y) \wedge \tilde{\omega} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \right) = \\ &= \frac{n!}{(2\pi i)^n} \left(\int_{V \setminus K} d(f \cdot y \tilde{\omega} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) - \int_{V \setminus K} \bar{\partial} (f \cdot y) \wedge \tilde{\omega} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \right) \end{aligned}$$

Die Form $f(y) \tilde{\omega} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ hat kompakten Support in $V \setminus K$, denn $(\text{supp } y) \subset K_{\varepsilon_0} \subset V$ und $v_j \equiv 0$ auf einer offenen Umgebung von K für $j=1, \dots, n$.

Damit folgt $\int_{V \setminus K} d(f(y) \tilde{\omega} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) = 0$ nach dem Satz von Stokes

und es folgt

$$\begin{aligned}
 (4.19'') \quad \phi_a(f) &= - \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus K} \bar{\partial}(f(y)) \wedge \tilde{\omega} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\
 &= - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus K} \bar{\partial}(f(y)) \wedge \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v_j \bar{\partial} v_1 \wedge \dots \widehat{\bar{\partial} v_j} \dots \bar{\partial} v_n \right) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\
 &= - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus K} \bar{\partial}(f(y)) \wedge \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bar{\partial} u_1 \wedge \dots \widehat{\bar{\partial} u_j} \dots \bar{\partial} u_n \right) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,
 \end{aligned}$$

denn es ist $\bar{\partial}(f(y)) = 0$ auf U und $v_j \equiv u_j$ auf $\mathbb{C}^n \setminus U$ für $j=1, \dots, n$, siehe dazu die Definition (4.6).

QED.

4.8. Bem.:

Die Formel (4.17) weist eine starke formale Ähnlichkeit mit der Koppelman - Formel auf. Diese liefert eine Darstellung von komplexwertigen Funktionen f , die C^1 auf einer offenen Umgebung von $\bar{\Omega}$ sind, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und beschränkt (mit C^1 -glattem Rand, der von endlichem Zusammenhang sei), mithilfe geeigneter Cauchy-Fantappiè-Kerne $K(z, \zeta)$ durch

$$(4.21) \quad f(\zeta) = C_n \left(\int_{\partial\Omega} f(z) K(z, \zeta) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n - \int_{\Omega} \bar{\partial} f(z) K(z, \zeta) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \right)$$

für alle $\zeta \in \Omega$, wobei $C_n \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Für $n=1$ ist $K(z, \zeta) = \frac{1}{z-\zeta}$

und $C_1 = 1/(2\pi i)$, vgl. hierzu Hörmander [25], Theorem 1.2.1., für $n > 1$ findet man die explizite Gestalt der Kerne $K(z, \zeta)$, welche $(0, n-1)$ -Formen in z sind, z.B. bei Koppelman [31], [32] oder Øvrelid [39].

Durch Multiplikation von $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $y \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $y \equiv 1$ auf U , $U \subset \bar{U} \subset \Omega$, $\text{supp } y$ kompakt, erreicht man, daß mit (4.21) gilt:

$$(4.21') \quad f(\zeta) = - C_n \int_{\Omega} \bar{\partial}(f(y))(z) K(z, \zeta) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \quad \text{für alle } \zeta \in U.$$

Die folgende Bemerkung zeigt, daß ein gewisses Wachstum (der Norm) der punktwise definierten $b_1, \dots, b_n \in A$ aus (4.1') gleiches Wachstum der Differentialform ω aus (4.18) nach sich zieht:

4.9. Bem.:

Für $a_1, \dots, a_n \in A$ gelte $\sigma(a) \subset K$, wobei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und es sei $V := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) < 1\}$. Es bezeichne $\rho_K(z)$ für $z \in V$ eine der beiden Funktionen

$$(4.22) \quad \rho_K(z) := d(z, K)^k, \text{ wobei } k \in \mathbb{N}_+ \text{ fest,} \quad \text{oder}$$

$$(4.23) \quad \rho_K(z) := \exp\left(-\frac{L}{d(z, K)}\right) \text{ für } z \in V \setminus K, \quad \rho_K(z) := 0 \text{ für } z \in K,$$

$$\text{wobei } L > 0 \text{ fest und } \bar{M}^*(x) = \log \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{x^p M_0 p!}{M_p} \quad \text{für } x > 0.$$

Wir bemerken, daß $\rho_K(z)$ in beiden Fällen Lipschitz-stetig auf V ist, für (4.22) ist dies klar, für (4.23) beachte daß die Funktion $g(y) := \exp(-\bar{M}^*(\frac{L}{y}))$ für $y \in \mathbb{R}_+$ und $g(y) := 0$ für $y \leq 0$ stetig differenzierbar ist. Setze für $z, \tilde{z} \in V$ $y := d(z, K)$, $\tilde{y} := d(\tilde{z}, K)$, dann gilt:

$$(4.24) \quad |\rho_K(z) - \rho_K(\tilde{z})| = |g(y) - g(\tilde{y})| \leq C |y - \tilde{y}| = C |d(z, K) - d(\tilde{z}, K)| \\ \leq C \|z - \tilde{z}\|,$$

wobei die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$ bezeichne. Offenbar kann $\rho_K(z)$ in beiden Fällen konstant fortgesetzt werden zu einer Lipschitz-stetigen Funktion auf $\mathbb{C}^n$.

Nach (4.1') existieren zu $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma(a)$ Elemente $b_1^z, \dots, b_n^z \in A$

mit $\sum_{j=1}^n (z_j - a_j) b_j^z = e$. Mit Bem. 4.5. folgt, daß Funktionen $u_1, \dots, u_n$

$\in C^\infty(\mathbb{C}^n \setminus \sigma(a), A)$ existieren, so daß $\sum_{j=1}^n (z_j - a_j) u_j(z) = e$ für alle $z \in \mathbb{C}^n \setminus \sigma(a)$. Wir wollen diese Aussage verschärfen für den Fall, daß für

$j = 1, \dots, n$ gilt

$$(4.25) \quad \|b_j^z\| \leq C_1 \frac{1}{\rho_K(z)} \quad \text{für } z \in V \setminus K \text{ und ein festes } C_1 > 0.$$

Definieren wir nämlich für die $(0, n-1)$ -Form $\omega =$

$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bar{\partial} u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\bar{\partial} u_j} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} u_n$ aus (4.18), die sich eindeu-

tig in der Form $\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n} g_{j_1 \dots j_{n-1}} dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_{n-1}}$ mit

$g_{j_1 \dots j_{n-1}} \in C^\infty(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{C}(a), A)$ schreiben läßt, daß

$$(4.26) \quad \|\omega(z)\| := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n} \|g_{j_1 \dots j_{n-1}}(z)\|_A \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{C}(a),$$

dann behaupten wir:

Aus (4.25) folgt, daß $u_1, \dots, u_n$ und damit ω so gewählt werden kann, daß gilt

$$(4.27) \quad \|\omega(z)\| \leq C_2 \frac{1}{\rho_K(z)^{2n-1}} \quad \text{für } z \in V \setminus K \text{ und ein festes } C_2 > 0.$$

(Da M_p (M2) erfüllt, bedeutet dies für den Fall (4.23), daß

$$(4.27') \quad \|\omega(z)\| \leq C_3 \exp(\bar{M}^*(\frac{\tilde{L}}{d(z, K)})) \quad \text{für } \tilde{L} := \tilde{C} \cdot L, \tilde{C} > 0 \text{ geeignete}$$

Konstante, $C_3 > 0$ fest, vgl. Komatsu [29], Prop. 3.6.)

Bew.:

Sei $z = (z_1, \dots, z_n) \in V \setminus K$ beliebig aber fest und gelte (4.25). Sei

$\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) \in \mathbb{C}^n$ und für $z_j := x_j + i x_{j+n}$, $\tilde{z}_j := \tilde{x}_j + i \tilde{x}_{j+n}$, $j=1, \dots, n$, sei

$|z - \tilde{z}|_\infty := \sup_{k=1, \dots, 2n} |x_k - \tilde{x}_k| < (1/(2\sqrt{2} C_1 n)) \cdot \rho_K(z)$, dann ist

$$\sum_{j=1}^n (\tilde{z}_j - a_j) b_j^z = e - \sum_{j=1}^n (z_j - \tilde{z}_j) b_j^z \quad \text{und} \quad \left\| \sum_{j=1}^n (z_j - \tilde{z}_j) b_j^z \right\|_A \leq 1/2$$

wegen (4.25), woraus folgt, daß

$$(4.28) \quad \left(\sum_{j=1}^n (\tilde{z}_j - a_j) b_j^z \right)^{-1} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^n (z_j - \tilde{z}_j) b_j^z \right)^m \quad \text{existiert und es}$$

ist

$$(4.28') \quad \left\| \left(\sum_{j=1}^n (\tilde{z}_j - a_j) b_j^z \right)^{-1} \right\|_A \leq 2.$$

Wir definieren zu $z \in V \setminus K$ die offene Würfel-Umgebung $U_z \subset \mathbb{C}^n$ durch

(4.29) $U_z := \{\tilde{z} \in \mathbb{C}^n \mid |z - \tilde{z}|_\infty < (1/(2\sqrt{2} C_1 n)) \cdot \rho_K(z)\}$ und die Funktionen $\tilde{u}_j^z \in \mathcal{O}(U_z, A)$ für $j=1, \dots, n$ durch

$$(4.30) \quad \tilde{u}_j^z(\tilde{z}) := b_j^z \left(\sum_{k=1}^n (\tilde{z}_k - a_k) b_k^z \right)^{-1} \quad \text{für alle } \tilde{z} \in U_z.$$

Wir bemerken nun, daß für die nichtnegative Lipschitz-stetige Funktion $\rho_K(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, mit $K = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho_K(z) = 0\}$ eine Überdeckung von $\mathbb{C}^n \setminus K$ mit offenen Würfeln $\{U_i\}_{i \in I}$ existiert, so daß für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}_+$ der Durchschnitt von jeweils n_0 verschiedenen $U_{i_1}, \dots, U_{i_{n_0}}$ leer ist, und daß für die Kantenlänge $\ell(U_i)$ sowie den Mittelpunkt z_i von U_i , $i \in I$, gilt:

$$(4.31) \quad A_1 \cdot \rho_K(z_i) \leq \ell(U_i) \leq A_2 \cdot \rho_K(z_i) \quad \text{für Konstanten } A_1 > 0, A_2 > 0.$$

Außerdem existiert eine Zerlegung der Eins $\{\chi_i\}_{i \in I}$ bzgl. der $\{U_i\}_{i \in I}$ auf $\mathbb{C}^n \setminus K$, d.h. $\chi_i \in C^\infty(\mathbb{C}^n \setminus K)$, $0 \leq \chi_i(x) \leq 1$, $(\text{supp } \chi_i) \subset U_i$ kompakt, $\sum_{i \in I} \chi_i(x) = 1$ für $x \in \mathbb{C}^n \setminus K$ und die Summe hat höchstens $n_0 - 1$ Summanden $\neq 0$ und es gilt für $k \in \{1, \dots, 2n\}$ und $i \in I$, daß

$$(4.32) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \chi_i(x) \right| \leq C \frac{1}{\rho_K(x)} \quad \text{für ein festes } C > 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{C}^n \setminus K (\cong$$

$\mathbb{R}^{2n} \setminus K$). Diese Bemerkung ist eine Verallgemeinerung von Malgrange [35], Kap. I, Lemma 3.1., vgl. auch Nguyen t. H. [37], 2.2., 2.3., bzw. [38], Lemme 5 und Prop. 7. Wir können annehmen, daß in (4.31) gilt $A_2 \leq 1/(\sqrt{2} \cdot C_1 n)$, daß also $U_i \subset U_{z_i}$ für die Mittelpunkte z_i von U_i , vgl. (4.29). Außerdem können wir annehmen, daß $A_2 \leq (1/(2\tilde{C}_1 \sqrt{2n}))$, so daß aus der Lipschitz-Stetigkeit (mit Konstante $\tilde{C}_1$) von ρ_K folgt, daß

$$\ell(U_i) \leq A_2 \cdot \rho_K(z_i) \leq (1/(2\sqrt{2n})) \cdot d(z_i, K) \leq \frac{1}{2} \cdot \inf_{y \in K} |z_i - y|_\infty.$$

Es existiert also eine offene Umgebung $\tilde{V} \subset V$ von K , so daß die Menge derjenigen U_i , $i \in I$, deren Mittelpunkte $z_i \in V$ erfüllen, $\tilde{V} \setminus K$ überdecken und daß gilt $\sum_{i \in I, z_i \in \tilde{V}} \chi_i(x) = 1$ für $x \in \tilde{V} \setminus K$ für die obige Zerlegung der Eins.

Wir definieren nun für $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) \in \tilde{V} \setminus K$ Funktionen $u_j(\tilde{z}) \in C^\infty(\tilde{V} \setminus K, A)$, $j=1, \dots, n$, durch

$$(4.33) \quad u_j(\tilde{z}) := \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \cdot \tilde{u}_j^{z_i}(\tilde{z}) \quad , \quad \text{wobei}$$

$I_{\tilde{z}} := \{i \in I \mid \tilde{z} \in U_i, z_i \in V\}$. Dann gilt:

$$(4.34) \quad \sum_{j=1}^n (\tilde{z}_j - a_j) u_j(\tilde{z}) = \sum_{j=1}^n (\tilde{z}_j - a_j) \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \cdot \tilde{u}_j^{z_i}(\tilde{z}) = \\ \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \sum_{j=1}^n (\tilde{z}_j - a_j) \cdot \tilde{u}_j^{z_i}(\tilde{z}) \stackrel{(4.30)}{=} \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \cdot e = e \quad ,$$

$$\text{da } \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) = 1 \quad .$$

Außerdem gelten für $\tilde{z} \in \tilde{V} \setminus K$ und $1 \leq j, k \leq n$ die folgenden Abschätzungen:

$$(4.35) \quad \|u_j(\tilde{z})\|_A \leq \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \|\tilde{u}_j^{z_i}(\tilde{z})\| \stackrel{(4.30)}{\leq}$$

$$\sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \|b_j^{z_i}\| \left\| \left(\sum_{k=1}^n (\tilde{z}_k - a_k) b_k^{z_i} \right)^{-1} \right\| \stackrel{(4.28')}{\leq} 2C_1 \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \frac{1}{\rho_K(z_i)} \quad (4.25)$$

Es gilt für $\tilde{z} \in U_i$, daß $\rho_K(\tilde{z}) \leq \tilde{C} \cdot \rho_K(z_i)$ für festes $\tilde{C} > 0$, denn angenommen $\rho_K(\tilde{z}) > \rho_K(z_i)$, dann folgt

$$(4.36) \quad \rho_K(\tilde{z}) - \rho_K(z_i) = |\rho_K(\tilde{z}) - \rho_K(z_i)| \leq \tilde{C}_1 \cdot |\tilde{z} - z_i|_\infty \Rightarrow \\ \rho_K(\tilde{z}) \leq \tilde{C}_1 \cdot |\tilde{z} - z_i|_\infty + \rho_K(z_i) \stackrel{(4.29)}{\leq} \tilde{C}_2 \cdot \rho_K(z_i) + \rho_K(z_i) = \\ (\tilde{C}_2 + 1) \cdot \rho_K(z_i) \quad .$$

Damit folgt aus (4.35), daß

$$(4.35') \quad \|u_j(\tilde{z})\| \leq B_1 \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \frac{1}{\rho_K(\tilde{z})} = B_1 \frac{1}{\rho_K(\tilde{z})} \quad , \quad B_1 > 0$$

Konstante.

Ebenso gilt

$$(4.37) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} u_j(\tilde{z}) \right\|_A = \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \left(\sum_{i \in I_{\tilde{z}}} x_i(\tilde{z}) \cdot \tilde{u}_j^{z_i}(\tilde{z}) \right) \right\| = \\ \left\| \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} x_i(\tilde{z}) \cdot \tilde{u}_j^{z_i}(\tilde{z}) \right\| \quad , \quad \text{da } \tilde{u}_j^{z_i} \text{ holomorph auf } U_i, \text{ also}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} u_j(\tilde{z}) \right| \leq \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} x_i(\tilde{z}) \right| \cdot \|\tilde{u}_j^{z_i}(\tilde{z})\| \quad \text{vgl. (4.35), (4.35')} \leq$$

$$B_2 \frac{1}{\rho_K(\tilde{z})} \sum_{i \in I_{\tilde{z}}} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} x_i(\tilde{z}) \right| \quad \text{für eine Konstante } B_2 > 0. \text{ Mit (4.32) und}$$

da $I_{\tilde{z}}$ höchstens (n_0-1) Elemente enthält, folgt

$$(4.37') \quad \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} u_j(\tilde{z}) \right| \leq B_2 \frac{1}{\rho_K(\tilde{z})} (n_0-1) \leq \frac{1}{\rho_K(\tilde{z})} = B_3 \frac{1}{\rho_K(\tilde{z})^2},$$

$B_3 > 0$ Konstante.

Damit folgt aus (4.35') und (4.37') für $\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bar{\partial} u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\bar{\partial} u_j} \wedge \bar{\partial} u_n$ die Abschätzung (4.27) für $z \in \tilde{V} \setminus K$ und damit natürlich auch für jede offene beschränkte Umgebung $V_1 \subset \mathbb{C}^n$ von K und $z \in V_1 \setminus K$. qed.

Wir kommen nun zum holomorphen Funktionalkalkül von J.L. Taylor. Sei dazu X ein Banachraum und $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}(X)$ kommutierende stetige lineare Operatoren auf X .

Das Taylor Spektrum $\sigma(a, X)$ von $a = (a_1, \dots, a_n)$ wird als die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}^n$ definiert, für die ein gewisser Kokettenkomplex $F(X, z-a)$ nicht-triviale Kohomologiegruppen hat, (wir verweisen auf J.L. Taylor [50], [51] oder [52], Def. 1.1.). Es gilt, daß $\sigma(a, X) \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und nicht-leer ist (siehe Taylor [50], [51], oder [52], Prop. 1.4., 1.5.) und für jede kommutative abgeschlossene Unter algebra A von $\mathcal{L}(X)$, die $a_1, \dots, a_n$ enthält, gilt für das gemeinsame Spektrum $\sigma_A(a)$ von $a = (a_1, \dots, a_n)$ bzgl. A , daß

$$(4.38) \quad \sigma(a, X) \subset \sigma_A(a) \quad , \text{ siehe Taylor [50], Lemma 1.1. oder}$$

[52], Prop. 1.3. . Die Inklusion ist im allgemeinen echt, siehe Taylor [50], §4 und Albrecht [4], Theorem 6(b) .

Der holomorphen Funktionalkalkül von J.L. Taylor sagt nun aus, daß zu

$a = (a_1, \dots, a_n)$ ein stetiger Algebrehomomorphismus $\phi_a: \mathcal{O}(\sigma(a, X)) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ existiert mit $\phi_a(\underline{z}_j) = a_j$, $j=1, \dots, n$, und $\phi_a(\underline{1}) = I$. Außerdem gilt $\phi_a(\mathcal{O}(\sigma(a, X))) \subset (a)''$, wobei $(a)'' := \{b \in \mathcal{L}(X) \mid bc = cb \text{ für}$

$c \in \mathcal{L}(X) \text{ mit } ca_j = a_j c, j=1, \dots, n\}$ der Bikommutant von $a = (a_1, \dots, a_n)$

sei, (siehe Taylor [51] oder [52], Theorem 2.1.). Man beachte, daß $(a)''$ eine abgeschlossene, kommutative Unterlgebra von $\mathcal{L}(X)$ ist.

Albrecht hat in [4] gezeigt, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Elemente $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}(X)$ existieren, X geeigneter Banachraum, so daß $\mathcal{O}(\sigma_{(a)}, (a)) \subsetneq \mathcal{O}(\sigma(a, X))$, diese Aussage ist stärker als $\sigma(a, X) \subsetneq \sigma_{(a)}, (a)$.

Wir geben im folgenden (geometrische) Bedingungen an Teilmengen $S \subset \mathbb{C}^n$ an, so daß aus $S \supset \sigma(a, X)$ folgt $\sigma(a, X) = \sigma_{(a)}, (a)$ oder zumindest $\sigma(a, X) \subset S \Rightarrow \sigma_{(a)}, (a) \subset S$. Hierzu definieren wir:

4.10. Definition : (vgl. Taylor [51], §5 oder Albrecht [1], Abschnitt 2)

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt, dann heißt $K^S := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \prod_{j=1}^n (z_j - \underline{w}_j) f_j(w) = 1\}$ hat keine Lösung $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(K)$ die spektralkonvexe Hülle von K , hierbei bezeichnen $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ die Funktionskeime der Koordinatenfunktionen auf K . K heißt spektralkonvex, falls $K = K^S$.

Da stets $K \subset K^S$ gilt, ist eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}^n$ offenbar genau dann spektralkonvex, wenn für alle $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus K$ die Gleichung

$$(4.39) \quad \prod_{j=1}^n (z_j - \underline{w}_j) f_j(w) = 1 \quad \text{eine Lösung } f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(K) \text{ hat.}$$

Aus Taylor [51], Theorem 5.4. folgt, daß $\sigma_{(a)}, (a) \subset \sigma(a, X)^S$. Also folgt zusammen mit (4.38), daß

$$(4.40) \quad \sigma(a, X) \subset \sigma_{(a)}, (a) \subset \sigma(a, X)^S \quad \text{und damit}$$

$$(4.40') \quad \sigma(a, X) \text{ spektralkonvex} \Rightarrow \sigma(a, X) = \sigma_{(a)}, (a)$$

Um Beispiele spektralkonvexer Mengen zu erhalten zeigen wir:

4.11. Satz :

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und K holomorph-konvex, dann gilt : K ist spektralkonvex.

Bew. :

Sei also K holomorph-konvex und $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus K$ beliebig aber fest, dann existiert nach Definition 2.1. ein Holomorphiegebiet $U \subset \mathbb{C}^n$ mit $K \subset U$ und $z \notin U$. Es folgt, daß für alle $w = (w_1, \dots, w_n) \in U$ Elemente

$b_1^w, \dots, b_n^w \in \mathbb{C}$ existieren mit $\sum_{j=1}^n (z_j - w_j) b_j^w = 1$.

Damit folgt aber aus Cartan's Theorem B (vgl. Grauert/Remmert [21], Kap. V, §5, Satz 5.), daß Funktionen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ existieren mit

$$(4.41) \quad \sum_{j=1}^n (z_j - w_j) f_j(w) = 1 \quad \text{für alle } w = (w_1, \dots, w_n) \in U.$$

Also ist K spektralkonvex.

qed.

4.12. Bem.:

Damit folgt zum Beispiel, falls $\sigma(a, X) \subset M$, $M \subset \mathbb{C}^n$ total-reelle C^∞ -Untermannigfaltigkeit, mit Satz 2.4., Satz 4.11. und (4.40'), daß $\sigma(a, X) = \sigma_{(a)''}(a)$. Fordert man lediglich, daß $\sigma(a, X) \subset S$, wobei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und holomorph-konvex, so folgt aus Satz 4.11. und (4.40), daß $\sigma_{(a)''}(a) \subset S$.

Fordert man also in §5, Satz 5.1., daß $\sigma(a, X) \subset M$ und in §6, Satz 6.1., daß $\sigma(a, X) \subset S$, so folgt $\sigma_A(a) \subset M$ bzw. $\sigma_A(a) \subset S$ für die kommutative Banachalgebra $A = (a)''$ und die in §5 und §6 bewiesenen Aussagen gelten auch für das Taylorspektrum und den Taylorkalkül von $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}(X)$, $a_i a_j = a_j a_i$, $1 \leq i, j \leq n$, X Banachraum.

Man beachte, daß die Aussage über die Relation von $\sigma(a, X)$ und $\sigma_{(a)''}(a)$ lediglich aus der Eigenschaft $\sigma(a, X) \subset M$ bzw. $\sigma(a, X) \subset S$ gefolgert wird und noch nicht die Existenz einer Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls auf eine geeignete Algebra mit Zerlegung der Eins voraussetzt, vgl. hierzu Albrecht [1], Abschnitt 2.

§ 5. Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls auf die Algebra

$\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ bzw. $C^\infty(M)$, $M \subset \mathbb{C}^n$ total-reelle Untermannigfaltigkeit

Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes:

5.1. Satz :

Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbb{C}$ mit e und $a_1, \dots, a_n \in A$.

Für das gemeinsame Spektrum $\sigma(a)$ von $a = (a_1, \dots, a_n)$ gelte $\sigma(a) \subset M$, wobei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n$ sei.

Sei $W \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung von $\sigma(a)$ in $\mathbb{C}^n$ und für die Differentialform ω aus (4.18) gelte, daß $L > 0$ und $C > 0$ existieren mit

$$(5.1) \quad \|\omega(z)\| \leq C \cdot \exp(M^* \left(\frac{L}{d(z, M)} \right)) \quad \text{für } z \in W \setminus \bar{M}, \text{ hierbei sei}$$

wieder $M^*(x) = \log \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{x^p M_0 p!}{M_p}$ für $x \in \mathbb{R}_+$ die assoziierte Funktion

zu $M_p/p!$. Außerdem gelte

$$(5.2) \quad \dim_{\mathbb{R}} M = n \quad \text{oder} \quad (5.2') \quad A \text{ halbeinfach},$$

dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige lineare und multiplikative

Abbildung $\tilde{\phi}_a: \mathcal{E}^{(M_p)}(M) \rightarrow A$, die auf $\mathcal{O}(M)$ mit dem holomorphen Funktionalkalkül für $a = (a_1, \dots, a_n)$ übereinstimmt, insbesondere ist also

$\tilde{\phi}_a(z_j) = a_j$ für $j=1, \dots, n$ und $\tilde{\phi}_a(1_M) = e$, hierbei bezeichne z_j die j -te Koordinatenfunktion und 1_M die Einsfunktion auf M .

5.1'. Bem.:

Ist die Bedingung (5.2) zunächst nicht erfüllt, sondern gilt $\sigma(a) \subset \tilde{M}$, $\dim_{\mathbb{R}} \tilde{M} = k < n$, so kann versucht werden, $\tilde{M}$ einzubetten in eine $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{C}^n$ mit $\dim_{\mathbb{R}} M = n$.

5.2. Bem.:

Für die Gevrey-Folgen $M_p := p! \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$, $\alpha > 0$, bedeutet die Bedingung

(5.1) gerade, daß $L > 0$ und $C > 0$ existieren mit

$$(5.1') \quad ||\omega(z)|| \leq C \cdot \exp\left(\frac{L}{d(z,M)^\alpha}\right) \quad \text{für } z \in W \setminus \bar{M}, \text{ denn mit}$$

$s := 1 + \frac{1}{\alpha} > 1$ ist $M^*(x)$ äquivalent zu $x \mapsto x^{1/(s-1)}$, vgl. (1.2) und (3.15).

5.3. Satz :

Ersetzt man die Bedingung (5.1) aus Satz 5.1. durch die Bedingung: Es existieren $r \in \mathbb{N}_+$ und $C > 0$ mit

$$(5.1'') \quad ||\omega(z)|| \leq C \frac{1}{d(z,M)^r} \quad \text{für } z \in W \setminus \bar{M}, \text{ so kann man } \mathcal{E}^{(M_p)}$$

in Satz 5.1. durch C^∞ ersetzen. Dies wird im folgenden ebenfalls bewiesen.

5.4. Bem.:

i.) Aus Bem. 4.9. folgt, daß die Bedingung (5.1) bzw. (5.1'') bereits dann erfüllt ist, wenn die entsprechende Abschätzung lediglich für die punktweise definierten $b_1^z, \dots, b_n^z \in A$ aus (4.1') gilt, siehe (4.25).

Man beachte dabei, daß die Funktionen $\bar{M}^*(x)$ und $M^*(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, äquivalent sind, es ist nämlich $\bar{M}^*(\frac{1}{2}x) + \log(\frac{1}{2}) \leq M^*(x) \leq \bar{M}^*(x)$ für $x \in \mathbb{R}_+$.

ii.) Ist die Bedingung (5.1) bzw. (5.1') bzw. (5.1'') für eine offene (beschränkte) Umgebung $W \subset \mathbb{C}^n$ von $\sigma(a)$ erfüllt, so gilt sie offenbar für alle beschränkten offenen Umgebungen von $\sigma(a)$. Ist $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt mit $\sigma(a) \subset \text{int}_M K \subset K \subset M$, wobei $\text{int}_M K$ das Innere von K bzgl. M bezeichne, so können wir in (5.1), (5.1') und (5.1'') $d(z,M)$ durch $d(z,K)$ ersetzen sowie $z \in W \setminus K$ zulassen. Wähle dazu $U \subset W$ offen mit $\sigma(a) \subset U$ so, daß für $z \in U$ gilt $d(z,M) = d(z,K)$. Für $z \in U \setminus M$ ist dann die Aussage klar, außerdem ist $||\omega(z)||$ auf $W \setminus U$ beschränkt und wir können annehmen, daß $M \cap U \subset K$.

Im folgenden sollen in diesem Paragraphen die Bezeichnungen aus Satz 5.1. gelten, außerdem sei $V \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $M \subset V$ so gewählt, daß Korollar 1.11. und Satz 3.14. gelten, d.h. zu $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ existiert $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ mit $F|_M = f$ und $D^\alpha \bar{\partial} F(x) = 0$ für alle $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, und die kanonische

Restriktion $\rho: \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ hat dichtes Bild.

Entsprechend sollen für den C^∞ -Fall aus Satz 5.3. die Bemerkungen 1.13. und 3.14'. für $V \supset M$ gelten und M ist dann lediglich C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$.

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt mit $\sigma(a) \subset \text{int}_M K \subset K \subset M \subset V$ und es sei $\varepsilon_0 > 0$ fest und so klein, daß

$$(5.3) \quad K_{\varepsilon_0} := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) \leq \varepsilon_0\} \subset V.$$

Zum Beweis von Satz 5.1. (bzw. Satz 5.3.) definieren wir als Hilfskonstruktion die folgenden Räume:

5.5. Definition :

Für eine Teilmenge $K \subset M$ und die Umgebung V von M wie oben definiere

$$(5.4) \quad E^{(Mp)}(V, K) := \{f \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V) \mid D^\alpha \bar{\partial} f(x) = 0 \text{ für alle } x \in K, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}\}$$

und

$$(5.4') \quad E(V, K) := \{f \in C^\infty(V) \mid D^\alpha \bar{\partial} f(x) = 0 \text{ für alle } x \in K, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}\}.$$

$E^{(Mp)}(V, K)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ und $E(V, K)$ ein abgeschlossener Teilraum von $C^\infty(V)$, beide Räume seien versehen mit der induzierten Topologie und sind damit Fréchet-Räume.

5.6. Satz :

Die Differentialform ω aus (4.18) erfülle (5.1). Es sei $y \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ fest mit $y \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von K und $(\text{supp } y) \subset K_{\varepsilon_0} \subset V$.

Für $f \in E^{(Mp)}(V, K)$ definiere

$$(5.5) \quad \phi_a(f) := - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus K} \bar{\partial}(f \cdot y) \wedge \omega \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

dann wird hierdurch ein Element $\phi_a(f) \in A$ definiert und es ist

$$\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(Mp)}(V, K), A).$$

5.7. Bem.:

Beachte, daß falls $f \in E^{(Mp)}(V, K)$ zusätzlich holomorph auf einer offenen Umgebung von K ist, so stimmt $\phi_a(f)$ aus (5.5) mit dem Wert des holomorphen Funktionalkalküls überein nach Satz 4.7., (daher die Schreibweise

$\phi_a(f)$ auch für $f \in E^{(M_p)}(V, K)$.

Bew.: (Satz 5.6.)

Nach Bem. 5.4.ii.) können wir annehmen, daß $W \supset K_{\varepsilon_0}$ und daß $L > 0$, $C > 0$ existieren mit

$$(5.6) \quad \|\omega(z)\| \leq C \cdot \exp(M^*(\frac{L}{d(z,K)})) \quad \text{für alle } z \in W \setminus K.$$

Setzen wir für $z \in V$ $|\bar{\partial}(f \cdot y)(z)| := \sum_{j=1}^n |\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f \cdot y)(z)|$ und beachten,

daß $(\text{supp } y) \subset K_{\varepsilon_0}$, dann folgt für $f \in E^{(M_p)}(V, K)$, daß

$$(5.7) \quad \|\phi_a(f)\|_A \leq \tilde{C} \int_{K_{\varepsilon_0} \setminus K} |\bar{\partial}(f \cdot y)(z)| \exp(M^*(\frac{L}{d(z,K)})) |d\bar{z}_1 \dots d\bar{z}_n| dz_1 \dots dz_n$$

Da $f \in E^{(M_p)}(V, K)$ und $y \equiv 1$ auf einer Umgebung von K , gilt für die Funktion $g := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f \cdot y)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, daß

(5.8) $D^\alpha g(z^*) = 0$ für alle $z^* \in K$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$. Aus Satz 3.7. folgt damit, daß für alle $L_1 > 0$ ein $C_1 > 0$ existiert mit

$$(5.9) \quad |\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f \cdot y)(z)| = |g(z)| \leq C_1 \|g\|_{M_p, (\bar{C}/L_1), K_{\varepsilon_0}} \cdot \exp(-M^*(\frac{L_1}{d(z,K)}))$$

für alle $z \in K_{\varepsilon_0} \setminus K$, wobei $\bar{C} > 0$ fest und $\|g\|_{M_p, h, K_{\varepsilon_0}} = \sup_{\substack{x \in K_{\varepsilon_0} \\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n}}} \frac{|D^\alpha g(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$

für $h > 0$.

Da M_p (M2) erfüllt, gilt $M_{p+1} \leq \tilde{A} H^p M_p$ für alle $p \in \mathbb{N}$ und $\tilde{A} > 0$, $H > 0$ geeignete Konstanten und es folgt:

$$(5.10) \quad \|g\|_{M_p, h, K_{\varepsilon_0}} = \|\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f \cdot y)\|_{M_p, h, K_{\varepsilon_0}} = \sup_{\substack{x \in K_{\varepsilon_0} \\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n}}} \frac{|D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f \cdot y)(x)|}{h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \leq$$

$$\sup_{\substack{x \in K_{\epsilon_0} \\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}}} \frac{|D^\alpha(f \cdot y)(x)|}{h^{|\alpha|-1} M_{|\alpha|-1}} \leq \left(\frac{h}{H}\right) \cdot \tilde{A} \cdot \sup_{\substack{x \in K_{\epsilon_0} \\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n}}} \frac{|D^\alpha(f \cdot y)(x)|}{(h/H)^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} = \left(\frac{h}{H}\right) \cdot \tilde{A} \cdot \|f \cdot y\|_{M_p, (\frac{h}{H}), K_{\epsilon_0}}$$

Da M_p (M1) erfüllt, folgt (vgl. Komatsu [29], Prop. 2.7.):

$$(5.10') \quad \|f \cdot y\|_{M_p, (\frac{h}{H}), K_{\epsilon_0}} \leq M_0 \cdot \|f\|_{M_p, (\frac{h}{2H}), K_{\epsilon_0}} \cdot \|y\|_{M_p, (\frac{h}{2H}), K_{\epsilon_0}}$$

und damit

$$(5.10'') \quad \|g\|_{M_p, h, K_{\epsilon_0}} \leq \left(\frac{h}{H}\right) \cdot \tilde{A} \cdot M_0 \cdot \|f\|_{M_p, (\frac{h}{2H}), K_{\epsilon_0}} \cdot \|y\|_{M_p, (\frac{h}{2H}), K_{\epsilon_0}}.$$

Also folgt aus (5.9) und (5.10''), daß für alle $L_1 > 0$ ein $C_2 > 0$ existiert mit

$$(5.11) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f \cdot y)(z) \right| \leq C_2 \cdot \|y\|_{M_p, (\frac{\bar{C}}{2HL_1}), K_{\epsilon_0}} \cdot \|f\|_{M_p, (\frac{\bar{C}}{2HL_1}), K_{\epsilon_0}} \cdot \exp(-M^* \left(\frac{L_1}{d(z, K)} \right))$$

für alle $z \in K_{\epsilon_0} \setminus K$.

Wähle nun $L_1 := L$, dann folgt aus (5.7) und (5.11), daß

$$(5.12) \quad \|\phi_a(f)\|_A \leq C_3 \cdot \|f\|_{M_p, (\frac{\bar{C}}{2HL}), K_{\epsilon_0}}, \text{ da } y \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V) \text{ fest.}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von $\phi_a: \mathcal{E}^{(M_p)}(V, K) \rightarrow A$, die Linearität ist klar.

QED.

5.6. Bem.:

Erfüllt die Differentialform ω aus (4.18) die Bedingung (5.1'') und definiert man für $f \in E(V, K)$ das Element $\phi_a(f)$ durch (5.5), so ist $\phi_a(f) \in A$ und $\phi_a \in \mathcal{L}(E(V, K), A)$. Außerdem stimmt nach Satz 4.7. $\phi_a(f)$ für f holomorph auf einer offenen Umgebung von K wieder mit dem Wert des holomorphen Funktionalkalküls überein.

Für $f \in E(V, K)$ folgt nämlich

$$(5.7') \quad \phi_a(f)|_A \leq \tilde{C} \int_{K_{\varepsilon_0} \setminus K} \bar{\partial}(f \cdot y)(z) \frac{1}{d(z, K)^r} d\bar{z}_1 \dots d\bar{z}_n dz_1 \dots dz_n.$$

Aus Satz 3.7., (3.13''') folgt, daß $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ existieren mit

$$(5.9') \quad \begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f \cdot y)(z) \right| &\leq C_1 \cdot |f \cdot y|_{r+1, K_{\varepsilon_0}} \cdot d(z, K)^r \\ &\leq C_2 \cdot |y|_{r+1, K_{\varepsilon_0}} \cdot |f|_{r+1, K_{\varepsilon_0}} \cdot d(z, K)^r \end{aligned}$$

für alle $z \in K_{\varepsilon_0}$ und y ist fest. Hierbei ist $|f|_{r, K_{\varepsilon_0}} :=$

$$\sup_{x \in K_{\varepsilon_0}, |x| \leq r} |D^r f(x)|. \text{ Es folgt}$$

$$\therefore \quad \phi_a(f)|_A \leq C_3 |f|_{r+1, K_{\varepsilon_0}} \quad \text{für eine Konstante } C_3 > 0 \text{ und}$$

damit die Stetigkeit von $\phi_a: E(V, K) \rightarrow A$.

5.8. Satz:

Die natürliche Restriktion $\rho: E^{(Mp)}(V, M) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ ist stetig, surjektiv und offen, ebenso $\rho: E(V, M) \rightarrow C^\omega(M)$.

Bew.:

Die Stetigkeit von ρ ist klar nach Definition von $E^{(Mp)}(V, M)$ in (5.4) und ρ ist surjektiv nach Korollar 1.11. und der Wahl von $V \supset M$. Da sowohl $E^{(Mp)}(V, M)$ als auch $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ ein Fréchet-Raum ist, folgt die Offenheit von ρ aus dem Satz von der offenen Abbildung.

Der C -Fall folgt entsprechend aus der Definition von $E(V, M)$ in (5.4'), aus Bem. 1.13. und da auch $E(V, M)$ und $C'(M)$ Fréchet-Räume sind.

QED.

Satz 5.6. und Satz 5.8. sind wichtige Schritte im Beweis von Satz 5.1. Dies ergibt sich aus der folgenden Bemerkung:

5.9. Bemerkung :

Nach Voraussetzung war $V \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $V \ni M$ so gewählt, daß mit Satz 3.14. die kanonische Restriktion $\mathcal{P}_\mathcal{O}: \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ dichtes Bild hat. Wir fordern nun, daß für die Abbildung $\mathcal{P}: E^{(Mp)}(V, M) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ gilt

(5.13) $\phi_a(\ker \mathcal{P}) = 0$, hierbei sei ϕ_a wie in (5.5) definiert, beachte, daß $E^{(Mp)}(V, M) \subset E^{(Mp)}(V, K)$ für $K \subset M$, und es gelte (5.1) . Dann definieren wir $\tilde{\phi}_a: \mathcal{E}^{(Mp)}(M) \rightarrow A$ durch $\phi_a = \tilde{\phi}_a \circ \mathcal{P}$, d.h. wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$(5.14) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(V) & \xrightarrow{\text{id}} & E^{(Mp)}(V, M) & \xrightarrow{\phi_a} & A \\ & & \mathcal{P} \downarrow & \nearrow \tilde{\phi}_a & \\ & & \mathcal{E}^{(Mp)}(M) & & \end{array}$$

Wegen der Surjektivität von $\mathcal{P}$ (Satz 5.8.) und wegen (5.13) ist $\tilde{\phi}_a$ wohldefiniert. Wegen der Stetigkeit von ϕ_a (Satz 5.6.) und der Offenheit von $\mathcal{P}$ (Satz 5.8.) ist $\tilde{\phi}_a$ stetig. $\tilde{\phi}_a$ ist multiplikativ auf $\mathcal{P}(\mathcal{O}(V))$, da ϕ_a multiplikativ auf $\mathcal{O}(V)$ ist. Da $\mathcal{P}(\mathcal{O}(V))$ dicht in $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ ist und die Multiplikation in $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ stetig, folgt, daß $\tilde{\phi}_a$ multiplikativ auf ganz $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$. Offenbar ist $\tilde{\phi}_a$ linear.

Wegen $\tilde{\phi}_a(\mathcal{P}(f)) = \phi_a(f)$ für $f \in \mathcal{O}(V)$ stimmt $\tilde{\phi}_a$ auf $\mathcal{P}(\mathcal{O}(V))$ mit dem holomorphen Funktionalkalkül überein und ist die einzige stetige Abbildung von $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ nach A mit dieser Eigenschaft, da $\mathcal{P}(\mathcal{O}(V))$ dicht in $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$. Insbesondere ist also $\tilde{\phi}_a(\underline{z}_j) = a_j$ für $j=1, \dots, n$ und $\phi_a(1_M) = e$.

5.9'. Bem.:

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.3. (C^∞ -Fall) folgt aus Bem. 5.6'. und Satz 5.8. sowie Bem. 3.14'. , daß Bem. 5.9. entsprechend gilt, wenn

man $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ durch $C^\infty(M)$ und $E^{(Mp)}(V,M)$ durch $E(V,M)$ ersetzt.

Wir haben jetzt lediglich noch nachzuprüfen, ob (5.13) tatsächlich erfüllt ist, wenn eine der Bedingungen (5.2) oder (5.2') gilt. Zunächst zur Bedingung (5.2), wir benötigen dazu das folgende Lemma:

5.10. Lemma :

Es gelte (5.1) und $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(Mp)}(V,K),A)$ sei wie in (5.5) definiert.

Definiere den abgeschlossenen Teilraum

$$E_0^{(Mp)}(V,M) := \{u \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V) \mid D^\alpha u(x) = 0 \text{ für alle } x \in M, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}\} \text{ von}$$

$E^{(Mp)}(V,M)$. Dann gilt

$$(5.15) \quad E_0^{(Mp)}(V,M) \subset \ker \phi_a$$

Bew.:

Jedes $u \in E_0^{(Mp)}(V,M)$ kann in der $\mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ -Topologie approximiert werden durch Funktionen $u_i \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$, $i \in \mathbb{N}$, mit $(\text{supp } u_i) \cap M = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dies folgt aus Komatsu [30], Theorem 4.4., vgl. den Beweis von Theorem 4.5. in [30].

Da also alle u_i , $i \in \mathbb{N}$, in einer offenen Umgebung von K verschwinden,

gilt $\phi_a(u_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ nach Bem. 5.7. . Da ϕ_a stetig und

$\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow u$ in $\mathcal{E}^{(Mp)}(V)$, folgt also auch $\phi_a(u) = 0$.

qed.

5.10'. Lemma :

Es gelten die Voraussetzungen wie in Satz 5.3. (C^∞ -Fall) und $\phi_a \in$

$\mathcal{L}(E(V,K),A)$ sei wie in (5.5) definiert. Definiere den abgeschlossenen

Teilraum $E_0(V,M) := \{u \in C^\infty(V) \mid D^\alpha u(x) = 0 \text{ für alle } x \in M, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}\}$ von

$E(V,M)$. Dann gilt

$$(5.15') \quad E_0(V,M) \subset \ker \phi_a$$

Bew.:

Jedes $u \in E_0(V,M)$ kann in der $C^\infty(V)$ -Topologie approximiert werden durch

Funktionen $u_i \in C^\infty(V)$, $i \in \mathbb{N}$, die in einer offenen Umgebung von K verschwinden, dies folgt aus Dieudonné [13], (17.7.2) und dem Bipolarensatz, vgl. auch Treves [54], S. 264 f.

Es folgt $\phi_a(u_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und damit $\phi_a(u) = 0$ wie im Bew. von Lemma 5.10. . qed.

Damit können wir zeigen:

5.11. Satz :

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{(Mp)}$ - (bzw. C^ω -) Untermannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{R}} M = n$ (und es gelte die Bedingung (5.1) (bzw. (5.1''))), dann ist (5.13) erfüllt.

Bew.:

Sei also $\mathcal{P}: E^{(Mp)}(V, M) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ (bzw. $\mathcal{P}: E(V, M) \rightarrow C^\infty(M)$) die kanonische Restriktion, dann zeigen wir, daß

$$(5.16) \quad \ker \mathcal{P} = E_0^{(Mp)}(V, M) \quad (\text{bzw. } (5.16') \quad \ker \mathcal{P} = E_0(V, M)) ,$$

die Behauptung folgt dann aus (5.15) (bzw. (5.15')) .

Offenbar gilt $E_0^{(Mp)}(V, M) \subset \ker \mathcal{P}$ (bzw. $E_0(V, M) \subset \ker \mathcal{P}$). Sei nun $u \in \ker \mathcal{P}$, dann gilt

$$(5.17) \quad u(z_0) = 0 \quad \text{für alle } z_0 \in M \quad \text{und}$$

$$(5.18) \quad D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(z_0) = 0 \quad \text{für alle } z_0 \in M, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, j=1, \dots, n .$$

Wir zeigen nun $D^\alpha u(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in M, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ durch vollständige Induktion nach $|\alpha| \in \mathbb{N}$:

$|\alpha| = 0$ ist gerade (5.17), gelte also $D^\alpha u(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in M$ bereits für $|\alpha| = m \in \mathbb{N}$. Sei $\beta \in \mathbb{N}^{2n}$ mit $|\beta| = m+1$, schreibe $\beta = \alpha + e_\ell$, e_ℓ sei der ℓ -te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^{2n}$, $\ell \in \{1, \dots, 2n\}$, dann ist $|\alpha| = m$. Sei nun $z_0 \in M$ beliebig aber fest, dann folgt aus (5.18), daß

$$(5.19) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} D^\alpha u(z_0) = 0 \quad \text{für } j=1, \dots, n .$$

Wir können annehmen, daß die reellen Koordinaten $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ des $\mathbb{C}^n$ so gewählt sind, daß $\frac{\partial}{\partial x_1}|_{z_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_{z_0}$ eine Basis der Komplexifizierung $T_{z_0}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ von $T_{z_0}(M)$ bildet, (beachte, daß $n = \dim_{\mathbb{R}} M$).

Sei nun $U \subset V$ eine offene Umgebung von z_0 und $h: U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$ ein $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. C^∞)-Diffeomorphismus mit

$$h(M \cap U) = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n}) \in \tilde{U} \mid \xi_{n+1} = \dots = \xi_{2n} = 0 \},$$

$$h(z_0) = 0, \text{ sowie } \frac{\partial}{\partial x_j}|_{z_0} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}|_0, \frac{\partial}{\partial y_j}|_{z_0} = \frac{\partial}{\partial \xi_{j+n}}|_0 \text{ für } j=1, \dots, n,$$

(vgl. hierzu Range/Siu [43], Bew. zu Prop. 1.7.).

Wegen (5.19) gilt für $j=1, \dots, n$, daß $(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j}) D^\alpha u(z_0) = 0$, es folgt

$$(5.20) \quad (\frac{\partial}{\partial \xi_j} + i \frac{\partial}{\partial \xi_{j+n}}) (D^\alpha u \circ h^{-1})(0) = 0 \quad . \text{ Nach Induktionsannahme}$$

gilt $D^\alpha u(z) = 0$ für alle $z \in M$, daraus folgt, daß $(D^\alpha u \circ h^{-1})(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \tilde{U}$ mit $\xi_{n+1} = \dots = \xi_{2n} = 0$. Es folgt $\frac{\partial}{\partial \xi_j} (D^\alpha u \circ h^{-1})(0) = 0$ für $j=1, \dots, n$, wegen (5.20) folgt $i \frac{\partial}{\partial \xi_{j+n}} (D^\alpha u \circ h^{-1})(0) = 0$ für $j=1, \dots, n$.

Damit gilt $\frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha u(z_0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y_j} D^\alpha u(z_0) = 0$ für $j=1, \dots, n$ und

es folgt $D^\beta u(z_0) = 0$. Da $z_0 \in M$ beliebig war, folgt die Induktionsbehauptung. qed.

Wir kommen nun zur Bedingung (5.2') und wollen zeigen, daß auch dann (5.13) gilt. Hierzu bemerken wir zunächst:

5.12. Bem.:

Sei $a_1, \dots, a_n \in A$, $\Delta(A) = \{ \Psi \in A' \mid \Psi \text{ multiplikativ und } \Psi \neq 0 \}$,

$\wedge: A \rightarrow C(\Delta(A))$ bezeichne die Gelfandtransformation und $\phi_a: \mathcal{O}(\mathcal{G}(a))$

$\rightarrow A$ bezeichne den holomorphen Funktionalkalkül aus Satz 4.1. und (4.7). Dann gilt für $\Psi \in \Delta(A)$, daß

$$(5.21) \quad \widehat{\phi_a}(f)(\Psi) = f(\widehat{a}_1(\Psi), \dots, \widehat{a}_n(\Psi)) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{O}(\sigma(a)).$$

Zum Beweis siehe Gamelin [16], Chap. III, Theorem 4.5. .

Wir zeigen nun, daß (5.21) auch für $f \in E^{(Mp)}(V, M)$ und ϕ_a aus (5.5) gilt:

5.13. Satz :

Sei $a_1, \dots, a_n \in A$, es gelte (5.1) und $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(Mp)}(V, K), A)$ sei wie in (5.5) definiert. Dann gilt für $\Psi \in \cdot(A)$, daß

$$(5.21') \quad \widehat{\phi_a}(f)(\Psi) = f(\widehat{a}_1(\Psi), \dots, \widehat{a}_n(\Psi)) \quad \text{für alle } f \in E^{(Mp)}(V, M).$$

Bew.:

Sei $f \in E^{(Mp)}(V, M)$ vorgegeben, d.h. $f \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ und $D^\alpha \bar{\partial} f(x) = 0$ für alle $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$. Sei $K_1 \subset M$ kompakt mit $\sigma(a) \subset K \subset \text{int}_M K_1 \subset K_1 \subset M$.

Es folgt wie in Korollar 3.11., daß eine Folge $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}_+} \subset \mathcal{O}(K_1)$ existiert mit

$$(5.22) \quad \|f - h_j\|_{M_p, \bar{h}, K_1} = \sup_{x \in K_1, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}} \frac{|D^\alpha(f - h_j)(x)|}{\bar{h}^{|\alpha|} M_{j|\alpha|}} \rightarrow 0 \quad \text{mit}$$

$j \rightarrow \infty$ für beliebiges $\bar{h} > 0$.

Sei h_j holomorph auf $U_j \subset V$ offen und $K_1 \subset U_j$, sei $\chi_j \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ mit

$\chi_j \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von K_1 in V und $(\text{supp } \chi_j) \subset U_j$

kompakt, dann definiere $\tilde{h}_j := \chi_j \cdot h_j$ auf U_j und setze $\tilde{h}_j$ durch 0 auf

V fort für $j \in \mathbb{N}_+$, dann gilt:

$$(5.23) \quad \tilde{h}_j \in E^{(Mp)}(V, K_1) \quad \text{und } \tilde{h}_j \text{ holomorph auf einer offenen Umgebung von } K_1, \text{ sowie}$$

$$(5.24) \quad \|f - \tilde{h}_j\|_{M_p, \bar{h}, K_1} \rightarrow 0 \quad \text{mit } j \rightarrow \infty \quad \text{für beliebiges } \bar{h} > 0.$$

Sei nun $\Psi \in \cdot(A)$ beliebig aber fest, so werden wir zeigen, daß bei geeignet gewähltem $K_1 \subset M$, welches die obige Bedingung erfüllt, $\bar{h} > 0$ und $C > 0$ existieren mit

$$(5.25) \quad |(\Psi \circ \phi_a)(f)| \leq C \cdot \|f\|_{M_p, \bar{h}, K_1} \quad \text{für alle } f \in E^{(M_p)}(V, K).$$

Ist (5.25) bewiesen, so folgt für $\tilde{h}_j$ aus (5.23), daß

$$(5.26) \quad |\widehat{\phi_a}(f)(\Psi) - f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))| \leq$$

$$|(\Psi \circ \phi_a)(f) - \tilde{h}_j(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))| + |\tilde{h}_j(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) - f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))|$$

$$(5.21) \quad = |(\Psi \circ \phi_a)(f) - \tilde{h}_j| + |\tilde{h}_j(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) - f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))|$$

$$(5.25) \quad \leq C \cdot \|f - \tilde{h}_j\|_{M_p, \bar{h}, K_1} + |\tilde{h}_j(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) - f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))|$$

$$\leq (C + M_0) \cdot \|f - \tilde{h}_j\|_{M_p, \bar{h}, K_1} \rightarrow 0 \quad \text{mit } j \rightarrow \infty \quad \text{nach (5.24)}.$$

Damit ist (5.21') bewiesen, wenn (5.25) gezeigt ist.

Zu (5.25): Die stetige Linearform $\Psi \circ \phi_a$ auf $E^{(M_p)}(V, K)$ kann nach dem Satz von Hahn-Banach zu $T \in \mathcal{L}'^{(M_p)}(V)$ fortgesetzt werden. Es ist $(\text{supp } T) \subset K \subset M$, denn sei $u \in \mathcal{L}^{(M_p)}(V)$ mit $(\text{supp } u) \subset V \setminus K$, dann ist $u \equiv 0$ auf einer offenen Umgebung von K und es folgt

$$\langle T, u \rangle = (\Psi \circ \phi_a)(u) = \langle \Psi, \phi_a(u) \rangle_{A', A} = 0, \quad \text{vgl. Bem. 5.7..}$$

Sei $k := \dim_{\mathbb{R}} M$, überdecke K mit offenen Mengen $U_1, \dots, U_m \subset V$, so daß $\mathcal{L}^{(M_p)}$ -Diffeomorphismen $h_i: U_i \rightarrow B_i \subset \mathbb{R}^{2n}$ offene Kugeln

um 0, mit $h_i(M \cap U_i) = B_i \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n}) \in B_i \mid \xi_{k+1} = \dots = \xi_{2n} = 0\}$ für $i=1, \dots, m$.

Sei außerdem $\chi_i \in \mathcal{L}^{(M_p)}(V)$, $i=1, \dots, m$, mit $\sum_{i=1}^m \chi_i \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von K , $0 \leq \chi_i(z) \leq 1$ für $z \in V$ und $(\text{supp } \chi_i) \subset U_i$ kompakt, dann definiere $T_i := \chi_i \cdot T$ für $i=1, \dots, m$, es ist $(\text{supp } T_i) \subset K \cap U_i \subset M \cap U_i$. Definiere $\tilde{T}_i \in \mathcal{L}'^{(M_p)}(B_i)$ durch

$$(5.27) \quad \langle \tilde{T}_i, g \rangle := \langle T_i|_{U_i}, g \circ h_i \rangle \quad \text{für } g \in \mathcal{L}^{(M_p)}(B_i) \quad (\text{vgl. An-}$$

hang, Satz 7.1.) . Es gilt $(\text{supp } \tilde{T}_i) \subset h_i(K \cap U_i) \subset D_i \subset \bar{D}_i \subset B_i \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$,

wobei D_i eine offene Kugel in $B_i \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ sei. Wenden wir auf $\tilde{T}_i$ den Darstellungssatz für Ultradistributionen mit kompaktem Support in Teilräumen an (siehe Komatsu [30], Theorem 3.1.), so folgt für $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(B_i)$, daß

$$(5.28) \quad \langle \tilde{T}_i, g \rangle = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k}} T_\beta(\xi) \otimes D^\beta \delta_{(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)}, \quad g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(B_i),$$

wobei $T_\beta(\xi) \in \mathcal{E}'^{(M_p)}(B_i \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$ und $\|T_\beta(\xi)\|_{(\mathcal{D}_{D_i}^{(M_p)}, \bar{h}_1)} \leq$

$C \cdot (L^{|\beta|} / M_{|\beta|})$ für geeignete feste $C > 0$, $L > 0$ und jedes genügend kleine $\bar{h}_1 > 0$, außerdem $\text{supp } \tilde{T}_i = \bigcup_{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k}} \text{supp } T_\beta(\xi)$. Damit können wir abschätzen: Für $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(B_i)$ ist

$$(5.29) \quad |\langle \tilde{T}_i, g \rangle| = \left| \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k}} \langle T_\beta(\xi), D^\beta \delta_{(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)}(g) \rangle \right| =$$

$$\left| \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k}} (-1)^{|\beta|} \langle T_\beta(\xi), \delta_{(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)}(D^\beta g) \rangle \right| \leq$$

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k}} |\langle T_\beta(\xi), D^\beta g(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0) \rangle| \leq$$

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k}} \|T_\beta(\xi)\|_{(\mathcal{D}_{D_i}^{(M_p)}, \bar{h}_1)} \cdot \sup_{\xi \in \bar{D}_i, \alpha \in \mathbb{N}^k} \frac{|D^\alpha D^\beta g(\xi)|}{(\bar{h}_1/2)^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}$$

(vgl. Komatsu [29], Prop.2.7.), da $(\text{supp } T_\beta(\xi)) \subset D_i$. Damit folgt

$$(5.29') \quad |\langle \tilde{T}_i, g \rangle| \leq C \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k}} \frac{L^{|\beta|}}{M_{|\beta|}} \cdot \sup_{\xi \in \bar{D}_i, \alpha \in \mathbb{N}^k} \frac{|D^\alpha D^\beta g(\xi)|}{\bar{h}_2^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \leq$$

$$\tilde{A} \cdot C \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k}} (\bar{h}_2 \cdot L)^{|\beta|} \cdot \sup_{\xi \in \bar{D}_i, \alpha \in \mathbb{N}^k} \frac{|D^\alpha D^\beta g(\xi)|}{(\bar{h}_2/H)^{|\alpha|+|\beta|} M_{|\alpha|+|\beta|}} \leq$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{C} \cdot \|g\|_{M_p, (\bar{h}_2/H), \bar{D}_i} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (C_1 \cdot \bar{h}_2 \cdot L)^m \leq C_2 \cdot \|g\|_{M_p, (\bar{h}_2/H), \bar{D}_i},$$

für $\bar{h}_2 := \bar{h}_1/2$ und wenn $\bar{h}_1$ so klein gewählt wird, daß $C_1 \cdot \bar{h}_1 \cdot L < 1$, sowie $\tilde{A} > 0$, $H > 0$ fest.

Sei nun $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$, so folgt aus (5.29'), daß mit $g := f \circ h_i^{-1} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\bar{D}_i)$

$$(5.30) \quad |\langle T_i, f \rangle| = |\langle T_i|_{U_i}, f \circ h_i^{-1} \circ h_i \rangle| = |\langle \tilde{T}_i, g \rangle| \leq$$

$$C_2 \cdot \|g\|_{M_p, \bar{h}_3, \bar{D}_i} = C_2 \cdot \|f \circ h_i^{-1}\|_{M_p, \bar{h}_3, \bar{D}_i} \leq$$

$$C_3 \cdot \|f\|_{M_p, \bar{h}_4, h_i^{-1}(\bar{D}_i)} \quad \text{mit Satz 7.1., Anhang.}$$

Es ist $h_i^{-1}(\bar{D}_i) \subset M \cap U_i$, setze $K_1 := \bigcup_{i=1}^m h_i^{-1}(\bar{D}_i)$, dann folgt für $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V, K)$:

$$(5.31) \quad |\langle \Psi \circ \phi_a(f) \rangle| = |\langle T, f \rangle| = |\langle \sum_{i=1}^m T_i, f \rangle| \leq \quad (5.30)$$

$$\sum_{i=1}^m C_3 \cdot \|f\|_{M_p, \bar{h}_4, h_i^{-1}(\bar{D}_i)} \leq C_4 \cdot \|f\|_{M_p, \bar{h}_4, K_1},$$

womit (5.25) bewiesen ist.

qed.

Ebenso können wir zeigen:

5.13'. Satz :

Sei $a_1, \dots, a_n \in A$, es gelte (5.1'') und $\phi_a \in \mathcal{L}(E(V, K), A)$ sei wie in (5.5) definiert, vgl. Bem. 5.6'. Dann gilt für $\Psi \in \Delta(A)$, daß

$$(5.21'') \quad \widehat{\phi_a(f)}(\Psi) = f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) \quad \text{für alle } f \in E(V, M).$$

Bew.:

Sei $f \in E(V, M)$ vorgegeben und $K_1 \subset M$ kompakt mit $\sigma(a) \in K \subset \text{int}_M K_1 \subset K_1 \subset M$.

Es folgt wie in Korollar 3.11., daß eine Folge $\{\tilde{h}_j\}_{j \in \mathbb{N}_+} \subset E(V, K_1)$ existiert, $\tilde{h}_j$ holomorph auf einer offenen Umgebung von K_1 , so daß

$$(5.24') \quad \|f - \tilde{h}_j\|_{m, K_1} := \sup_{x \in K_1, |\alpha| \leq m} |D^\alpha(f - \tilde{h}_j)(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty$$

für jedes vorgegebene $m \in \mathbb{N}$.

Analog zum Beweis von Satz 5.13. (ersetze $\mathcal{L}^{(M_p)}$ durch C^∞) zeigen wir anstelle von (5.25), daß für festes $\psi \in \wedge(A)$

$$(5.25') \quad |(\psi \circ \phi_a)(f)| \leq C \cdot \|f\|_{m, K_1} \quad \text{für geeignetes } C > 0, m \in \mathbb{N} \text{ und}$$

für alle $f \in E(V, K)$ und erhalten dann ebenso wie in (5.26) die Aussage (5.21').

Wir verwenden anstelle von (5.28) den Darstellungssatz für Distributionen mit kompaktem Support in Teilräumen (siehe Schwartz [48], Theorem XXXVI, S. 101) es gilt dann für $g \in C^\infty(B_1)$, daß

$$(5.28') \quad \langle \tilde{T}_i, g \rangle = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{2n-k} \\ |\beta| \leq m_1}} T_\beta(\xi) \otimes D^\beta \delta_{(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)}, \quad g > 0,$$

wobei $T_\beta(\xi) \in C^\infty(B_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$ und $\text{supp } T_\beta(\xi) \subset \text{supp } \tilde{T}_i$. Man erhält dann (5.25'), wenn man beachtet, daß die $T_\beta(\xi)$, $0 \leq |\beta| \leq m_1$, von endlicher Ordnung sind, da $\text{supp } T_\beta(\xi)$ kompakt. qed.

Aus Satz 5.13. bzw. Satz 5.13'. folgt nun :

5.14. Satz :

Seien $a_1, \dots, a_n \in A$ und A sei halbeinfach, (es gelte die Bedingung (5.1) bzw. (5.1')). Dann ist (5.13) erfüllt, d.h. es gilt $\phi_a(\ker \rho) = 0$, wobei $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(M_p)}(V, M), A)$ bzw. $\phi_a \in \mathcal{L}(E(V, M), A)$ wie in (5.5) und

$\rho: E^{(M_p)}(V, M) \rightarrow \mathcal{L}^{(M_p)}(M)$ bzw. $\rho: E(V, M) \rightarrow C^\infty(M)$ die kanonische Restriktion.

Bew.:

Sei $f \in E^{(M_p)}(V, M)$ (bzw. $f \in E(V, M)$) und $f \in \ker \rho$, d.h. $f|_M = 0$, dann folgt für $\psi \in \wedge(A)$ nach Satz 5.13. bzw. Satz 5.13' :

$\widehat{\phi_a}(f)(\psi) = f(\widehat{a_1}(\psi), \dots, \widehat{a_n}(\psi)) = 0$, da $(\widehat{a_1}(\psi), \dots, \widehat{a_n}(\psi)) \in \sigma(a) \subset M$, also folgt $\widehat{\phi_a}(f) = 0$. Da A halbeinfach, ist die Gelfandtransformation

$\wedge: A \rightarrow C(\wedge(A))$ injektiv, also folgt $\phi_a(f) = 0$. qed.

Damit ist Satz 5.1. und Satz 5.3. vollständig bewiesen!

Wir bemerken noch, daß auf die Bedingung (5.2) oder (5.2') nicht verzichtet werden kann:

5.15. Bem.:

Sei A nicht halbeinfach, sei $a_1 \in A$ mit $\sigma(a_1) \subset \mathbb{R}$ und $a_2 \in A$ quasinihpotent, $a_2 \neq 0$. Dann gilt $\sigma(a_1, a_2) \subset M := \mathbb{R} \times \{0\} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} z_1 = 0, z_2 = 0\}$. Bezeichne $\underline{z}_2$ die zweite Koordinatenfunktion auf M , so ist $\underline{z}_2 \equiv 0$ auf M und damit kann $\tilde{\phi}_a(\underline{z}_2) = a_2$ aus Satz 5.1. nicht erfüllt werden.

Zum Schluß dieses Paragraphen zeigen wir noch den Spektralabbildungssatz für $\tilde{\phi}_a$:

5.16. Satz:

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 5.1. bzw. 5.3. und sei $\tilde{\phi}_a$:

$\mathcal{E}^{(M_p)}(M) \rightarrow A$ (bzw. $\tilde{\phi}_a: C^\infty(M) \rightarrow A$) die Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls. Dann gilt:

- i) $\tilde{\phi}_a(g)(\Psi) = g(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))$ für alle $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $C^\infty(M)$) und $\Psi \in \Delta(A)$
- ii) $\sigma(\tilde{\phi}_a(f_1), \dots, \tilde{\phi}_a(f_m)) = f(\sigma(a))$ für alle $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $C^\infty(M)$), $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Bew.:

Zu i): $\mathcal{F}: E^{(M_p)}(V, M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $\mathcal{F}: E(V, M) \rightarrow C^\infty(M)$) ist surjektiv nach Satz 5.8., zu $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (bzw. $C^\infty(M)$) wähle $f \in E^{(M_p)}(V, M)$ (bzw. $E(V, M)$) mit $\mathcal{F}(f) = g$, dann folgt für $\Psi \in \Delta(A)$:

$$\tilde{\phi}_a(g)(\Psi) = \Psi(\tilde{\phi}_a(g)) \stackrel{(5.14)}{=} \Psi(\phi_a(f)) \stackrel{(5.21'), (5.21'')}{=} f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) =$$

$g(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))$, da $f|_M = g$.

Zu ii): $\sigma(\tilde{\phi}_a(f_1), \dots, \tilde{\phi}_a(f_m)) = \{(\tilde{\phi}_a(f_1)(\Psi), \dots, \tilde{\phi}_a(f_m)(\Psi)) \mid \Psi \in \Delta(A)\}$
 $=$ (wegen i)) $\{(f_1(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)), \dots, f_m(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))) \mid \Psi \in \Delta(A)\} =$
 $\cdot \{f_1(z), \dots, f_m(z) \mid z \in \sigma(a)\} = f(\sigma(a))$. qed.

§ 6. Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls auf Algebren differenzierbarer Funktionen mit teilweise Zerlegung der Eins

Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes:

6.1. Satz :

Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbb{C}$ mit e und $a_1, \dots, a_n \in A$.

Für das gemeinsame Spektrum $\sigma(a)$ von $a = (a_1, \dots, a_n)$ gelte $\sigma(a) \subset S$, wobei $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $K_0 \subset S$ kompakt, so daß $M := S \setminus K_0$ eine total-reelle $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$.

Sei $V \subset \mathbb{C}^n$ eine offene beschränkte Umgebung von S und sei $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von K_0 aus offenen Mengen $W_k \subset \mathbb{C}^n$ mit $\overline{W_{k+1}} \subset W_k \subset \overline{W_k} \subset V$ so, daß $S_k := S \cup \overline{W_k}$ holomorph-konvex ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für die Differentialform ω aus (4.18) gelte, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ Konstanten $L > 0$ und $C > 0$ existieren mit

$$(6.1) \quad \|\omega(z)\| \leq C \cdot \exp(M^* \left(\frac{L}{d(z, S_k)} \right)) \quad \text{für } z \in V \setminus S_k,$$

hierbei bezeichne $M^*(x) := \log \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{x^p \cdot M_0 \cdot p!}{M_p}$ für $x \in \mathbb{R}_+$ die assoziierte

Funktion zu $M_p/p!$. Außerdem gelte

$$(6.2) \quad \dim_{\mathbb{R}} M = n \quad \text{oder} \quad (6.2') \quad A \text{ halbeinfach},$$

dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige, lineare und multiplikative Abbildung $\tilde{\phi}_a: \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0) \rightarrow A$, die auf $\mathcal{O}(S)$ mit dem holomorphen Funktionalkalkül für $a = (a_1, \dots, a_n)$ übereinstimmt, insbesondere ist also $\tilde{\phi}_a(z_j) = a_j$ für $j=1, \dots, n$ und $\tilde{\phi}_a(1_S) = e$, hierbei bezeichne z_j die j -te Koordinatenfunktion und 1_S die Einsfunktion auf S . Der Raum $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ ist in Def. 3.8. definiert.

6.1'. Bem.:

Für $n=1$ ist die Bedingung ' S_k holomorph-konvex' in Satz 6.1. trivialer-

weise immer erfüllt, siehe Bem. 2.3. ii) .

6.2. Bem.:

Für die Gevrey-Folgen $M_p := p!^{(1 + \frac{1}{\alpha})}$, $\alpha > 0$, bedeutet Bedingung (6.1) gerade, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ Konstanten $L > 0$ und $C > 0$ existieren mit

$$(6.1') \quad \|\omega(z)\| \leq C \cdot \exp\left(\frac{L}{d(z, S_k)^\alpha}\right) \quad \text{für } z \in V \setminus S_k, \quad ,$$

vgl. Bem. 5.2. .

6.3. Satz :

Ersetzt man die Bedingung (6.1) aus Satz 6.1. durch die Bedingung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existieren Konstanten $r \in \mathbb{N}_+$ und $C > 0$ mit

$$(6.1'') \quad \|\omega(z)\| \leq C \cdot \frac{1}{d(z, S_k)^r} \quad \text{für } z \in V \setminus S_k, \quad ,$$

so kann man $\mathcal{E}^{(M_p)}$ in Satz 6.1. durch C^∞ ersetzen, d.h. es existiert eine eindeutig bestimmte stetige, lineare und multiplikative Abbildung $\tilde{\phi}_a: C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0)) \longrightarrow A$, die auf $\mathcal{O}(S)$ mit dem holomorphen Funktionalkalkül übereinstimmt. Der Raum $C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0))$ ist in Def. 3.8. definiert.

Satz 6.3. wird im folgenden ebenfalls bewiesen.

Die Bem. 5.4. aus §5 gilt für Satz 6.1. und Satz 6.3. entsprechend.

Wir bemerken, daß aus der Bedingung ' S_k holomorph-konvex für alle $k \in \mathbb{N}$ ' insbesondere folgt, daß S holomorph-konvex ist, denn ist $(U_{i,k})_{i \in \mathbb{N}}$

eine Umgebungsbasis aus Holomorphiegebieten für S_k , dann ist

$(U_{i,k})_{(i,k) \in \mathbb{N}^2}$ eine Umgebungsbasis aus Holomorphiegebieten für S .

Man vergleiche hierzu auch Bem. 4.12. (falls für kommutierende $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, das Taylorspektrum $\sigma(a, X) \subset S$ erfüllt).

Im folgenden sollen in diesem Paragraphen die Bezeichnungen aus Satz 6.1. gelten, (entsprechend für den C^∞ -Fall die aus Satz 6.3., M ist dann lediglich C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$). Außerdem sei $\varepsilon_0 > 0$ fest

und so klein gewählt, daß $(S_0)_{\varepsilon_0} := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, S_0) \leq \varepsilon_0\} \subset V$.

Zum Beweis von Satz 6.1. bzw. Satz 6.3. definieren wir als Hilfskonstruktion die folgenden Räume:

6.4. Definition :

Es sei für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$(6.3) \quad E^{(M_p)}(V, S_k) := \{f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V) \mid D^\alpha \bar{\partial} f(x) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, x \in S_k\}$$

und

$$(6.3') \quad E(V, S_k) := \{f \in C^\infty(V) \mid D^\alpha \bar{\partial} f(x) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, x \in S_k\},$$

hierbei sei $S_k = S \cup \overline{W_k}$, $S_k \subset V$ wie in Satz 6.1. definiert.

$E^{(M_p)}(V, S_k)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ und $E(V, S_k)$ ein abgeschlossener Teilraum von $C^\infty(V)$, beide Räume seien versehen mit der induzierten Topologie und sind damit Fréchet-Räume.

Wir definieren weiterhin

$$(6.4) \quad E^{(M_p)}(V, S, K_0) := \{f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V) \mid \exists \begin{array}{l} U \subset \mathbb{C}^n \text{ offen} \\ K_0 \subset U \subset V \end{array} D^\alpha \bar{\partial} f(x) = 0 \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, x \in S \cup U\}$$

sowie

$$(6.4') \quad E(V, S, K_0) := \{f \in C^\infty(V) \mid \exists \begin{array}{l} U \subset \mathbb{C}^n \text{ offen} \\ K_0 \subset U \subset V \end{array} D^\alpha \bar{\partial} f(x) = 0 \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, x \in S \cup U\}$$

und versehen diese Räume mit der Topologie

$$(6.4'') \quad E^{(M_p)}(V, S, K_0) = \operatorname{ind}_{k \in \mathbb{N}} E^{(M_p)}(V, S_k) \quad \text{und}$$

$$(6.4''') \quad E(V, S, K_0) = \operatorname{ind}_{k \in \mathbb{N}} E(V, S_k).$$

Da offenbar $E^{(M_p)}(V, S_{k+1})$ auf $E^{(M_p)}(V, S_k)$ die gegebene Topologie induziert (nämlich die $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ -Topologie), ist der induktive Limes in (6.4'') strikt, das gleiche gilt für (6.4''').

Es folgt insbesondere, daß $E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ (bzw. $E(V, S, K_0)$) ein vollständiger Hausdorffscher lokalkonvexer Raum ist und daß $E^{(M_p)}(V, S, K_0)$

(bzw. $E(V, S, K_0)$) ein vollständiges Netz im Sinne von de Wilde haben, vgl. Robertson/Robertson [44], Chap. VII, §1, Prop. 2 und 3, sowie Appendix, §3, außerdem de Wilde [60].

Damit können wir zeigen:

6.5. Satz :

Die Differentialform ω aus (4.18) erfülle (6.1). Es sei $y \in \mathcal{L}^{(M_p)}(V)$ fest mit $y \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von S und $(\text{supp } y) \subset S_{\varepsilon_0} \subset (S_0)_{\varepsilon_0} \subset V$. Für $f \in E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ definiere

$$(6.5) \quad \phi_a(f) = - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus S} \bar{\partial}(f \cdot y) \wedge \omega \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, \quad ,$$

dann wird hierdurch ein Element $\phi_a(f) \in A$ definiert und es ist $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(M_p)}(V, S, K_0), A)$.

Falls $f \in E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ zusätzlich holomorph auf einer offenen Umgebung von S , so stimmt $\phi_a(f)$ aus (6.5) mit dem Wert des holomorphen Funktionalkalküls überein nach Satz 4.7. .

Bew.:

Wir haben zu zeigen, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, daß $\phi_a: E^{(M_p)}(V, S_k) \rightarrow A$ stetig.

Für $z \in V$ setzen wir wieder $|\bar{\partial}(f \cdot y)(z)| := \sum_{j=1}^n |\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f \cdot y)(z)|$, dann

folgt für $f \in E^{(M_p)}(V, S_k)$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest, (wobei wir k so groß annehmen können, daß $y \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von S_k):

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \|\phi_a(f)\|_A &\leq \tilde{C} \int_{V \setminus S} |\bar{\partial}(f \cdot y)(z)| \|\omega(z)\| |d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n| \\ &= \tilde{C} \int_{S_{\varepsilon_0} \setminus S_k} |\bar{\partial}(f \cdot y)(z)| \|\omega(z)\| |d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n|, \end{aligned}$$

da $|\bar{\partial}(f \cdot y)(z)| = 0$ für $z \in S_k$ und $z \in V \setminus S_{\varepsilon_0}$.

Mit $g := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f \cdot y)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, gilt, da $y \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von S_k , daß

(6.7) $D^\alpha g(z^*) = 0$ für alle $z^* \in S_k$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$. Aus Satz 3.7. folgt, daß für alle $L_1 > 0$ ein $C_1 > 0$ existiert mit

$$(6.8) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f \cdot y)(z) \right| = |g(z)| \leq C_1 \cdot \|g\|_{M_p, (\bar{C}/L_1), S_{\varepsilon_0}} \cdot \exp(-M^* \left(\frac{L_1}{d(z, S_k)} \right))$$

für alle $z \in (S_k)_{\varepsilon_0}$, wobei $\bar{C} > 0$ fest, beachte, daß $\text{supp } g \subset S_{\varepsilon_0}$.

Ebenso wie im Bew. von Satz 5.6. folgt

$$(6.8') \quad \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (f \cdot y)(z) \right| \leq C_2 \cdot \|y\|_{M_p, (\bar{C}/(2H L_1)), S_{\varepsilon_0}} \cdot \|f\|_{M_p, (\bar{C}/(2H L_1)), S_{\varepsilon_0}} \cdot \exp(-M^* \left(\frac{L_1}{d(z, S_k)} \right))$$

für alle $z \in (S_k)_{\varepsilon_0} \subset V$, wobei $C_2 > 0$ eine Konstante.

Es gilt $\|\omega(z)\| \leq C \cdot \exp(M^* \left(\frac{L}{d(z, S_k)} \right))$ für $z \in V \setminus S_k$ und geeignetes

$L > 0$, $C > 0$. Wähle nun $L_1 := L$, dann folgt aus (6.6), da y fest, daß

$$(6.9) \quad \|\phi_a(f)\|_A \leq C_3 \cdot \|f\|_{M_p, (\bar{C}/(2H \cdot L)), S_{\varepsilon_0}} \cdot \int_{S_{\varepsilon_0} \setminus S_k} \exp(-M^* \left(\frac{L}{d(z, S_k)} \right)) \cdot \exp(M^* \left(\frac{L}{d(z, S_k)} \right)) \cdot d\bar{z}_1 \dots dz_n$$

$$\leq C_4 \cdot \|f\|_{M_p, (\bar{C}/(2H L)), S_{\varepsilon_0}}, \text{ woraus die Stetigkeit}$$

von $\phi_a: E^{(M_p)}(V, S_k) \rightarrow A$ folgt, die Linearität ist klar. QED.

6.5.1 Bem.:

Erfüllt die Differentialform ω aus (4.18) die Bedingung (6.1'') und definiert man für $f \in E(V, S, K_0)$ das Element $\phi_a(f)$ durch (6.5), so ist $\phi_a(f) \in A$ und $\phi_a \in \mathcal{L}(E(V, S, K_0), A)$. Außerdem stimmt nach Satz 4.7. $\phi_a(f)$ für solche f , die zusätzlich holomorph auf einer offenen Umgebung von S sind, mit dem Wert des holomorphen Funktionalkalküls überein. Für $f \in E(V, S_k)$ und $y \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung auf S_k , $y \in C_0^\infty(V)$, (vgl. den Bew. von Satz 6.5.), folgt nämlich

$$(6.6') \quad \|\phi_a(f)\| \leq \tilde{C} \int_{S_{\varepsilon_0} \setminus S_k} |\bar{\partial}(f \cdot y)(z)| \frac{1}{d(z, S_k)^r} |d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n|$$

$$\leq C_1 \cdot \|f\|_{r+1, S_{\varepsilon_0}} \quad \text{nach Satz 3.7., (3.13''') ,}$$

analog zum Bew. von Satz 6.5., (vgl. Bem. 5.6!'), dabei ist $\|f\|_{r+1, S_{\varepsilon_0}} = \sup_{x \in S_{\varepsilon_0}, |\alpha| \leq r+1} |D^\alpha f(x)|$. Es folgt $\phi_a \in \mathcal{L}(E(V, S, K_0), A)$.

6.6. Satz :

Die natürliche Restriktion $\rho: E^{(Mp)}(V, S, K_0) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}\mathcal{O}(M, K_0)$ ist stetig, surjektiv und offen, (ebenso $\rho: E(V, S, K_0) \rightarrow C^\infty\mathcal{O}(M, K_0)$).

Bew.:

Die Stetigkeit folgt sofort, da offenbar für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\rho: E^{(Mp)}(V, S_k) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}\mathcal{O}(M, W_k)$ stetig ist, $S_k = S \cup \bar{W}_k$. Die Surjektivität von $\rho: E^{(Mp)}(V, S, K_0) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}\mathcal{O}(M, K_0)$ folgt aus Korollar 1.12. . Um zu zeigen, daß ρ offen ist, schreiben wir $E := E^{(Mp)}(V, S, K_0)$, $F := \mathcal{E}^{(Mp)}\mathcal{O}(M, K_0)$ und $\rho = T \circ \pi$, wobei $\pi: E \rightarrow E/(\ker \rho)$ die kanonische Quotientenabbildung und $T: E/(\ker \rho) \rightarrow F$ stetige bijektive Abbildung. Es folgt, daß der Graph von T abgeschlossen ist und damit auch der Graph von T^{-1} . Der Raum F ist induktiver Limes von Fréchet-

Räumen F_k , $k \in \mathbb{N}$, (siehe Definition 3.8.). Gelte für $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest, daß $\{x_i\}_{i \in I} \subset F_k$ und $x_i \rightarrow 0$ sowie $T^{-1}(x_i) \rightarrow y$ in $E/(\ker \mathcal{P})$. Dann gilt auch $x_i \rightarrow 0$ in F und da der Graph von $T^{-1}: F \rightarrow E/(\ker \mathcal{P})$ abgeschlossen ist, folgt $y=0$. Also ist auch der Graph von $T^{-1}|_{F_k}$ abgeschlossen. Da $E/(\ker \mathcal{P})$ als separierter Quotient von E wieder ein vollständiges Netz hat, (vgl. Definition 6.4. sowie Robertson/Robertson [44], Appendix, §3) und $F_k (= \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, W_k))$ ein Fréchet-Raum, also ultrabornologisch ist, gilt der Graphensatz für $T^{-1}|_{F_k}: F_k \rightarrow E/(\ker \mathcal{P})$, vgl. Robertson/Robertson [44], Appendix, Theorem 2 und 3, d.h. $T^{-1}|_{F_k}$ ist stetig. Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt aber $T^{-1}: F \rightarrow E/(\ker \mathcal{P})$ ist stetig nach Definition der induktiven Limes-Topologie. Also ist $T: E/(\ker \mathcal{P}) \rightarrow F$ offen und damit auch $\mathcal{P} = T \circ \pi$ offen.

Für $\mathcal{P}: E(V, S, K_0) \rightarrow C^\infty \mathcal{O}(M, K_0)$ geht der Beweis völlig analog, zur Surjektivität benutze Bem. 1.13. . QED.

Analog zu §5 sind hier Satz 6.5. und Satz 6.6. wichtige Schritte zum Beweis von Satz 6.1.. Dies ergibt die folgende Bemerkung:

6.7. Bemerkung :

Es gelte (6.1) und $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(M_p)}(V, S, K_0), A)$ sei wie in (6.5) definiert. Wir fordern, daß für die kanonische Restriktion $\mathcal{P}: E^{(M_p)}(V, S, K_0) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ gilt

$$(6.10) \quad \phi_a(\ker \mathcal{P}) = 0 \quad .$$

Dann definieren wir $\tilde{\phi}_a: \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0) \rightarrow A$ durch $\phi_a = \tilde{\phi}_a \circ \mathcal{P}$, d.h. wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$(6.11) \quad \begin{array}{ccc} E^{(M_p)}(V, S, K_0) & \xrightarrow{\phi_a} & A \\ \mathcal{P} \downarrow & \nearrow \tilde{\phi}_a & \\ \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0) & & \end{array}$$

Wegen der Surjektivität von ρ (Satz 6.6.) und wegen (6.10) ist $\tilde{\phi}_a$ wohldefiniert. Wegen der Stetigkeit von ϕ_a (Satz 6.5.) und der Offenheit von ρ (Satz 6.6.) ist $\tilde{\phi}_a$ stetig. Bezeichne $\rho_{\mathcal{O}}: \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathcal{E}^{(\text{Mp})}(\mathcal{O}(M, K_0))$ die kanonische Abbildung, so folgt aus Satz 3.9., daß $\rho_{\mathcal{O}}$ dichtes Bild hat. Es ist $\tilde{\phi}_a$ multiplikativ auf $\rho_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(S))$, da der holomorphe Funktionalkalkül (bzgl. $\mathcal{O}(S)$) multiplikativ ist und ϕ_a mit diesem auf den Funktionen aus $E^{(\text{Mp})}(V, S, K_0)$, die holomorph auf einer offenen Umgebung von S sind, übereinstimmt, vgl. Satz 6.5.. Da $\rho_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(S))$ dicht in $\mathcal{E}^{(\text{Mp})}(\mathcal{O}(M, K_0))$ ist und die Multiplikation in $\mathcal{E}^{(\text{Mp})}(\mathcal{O}(M, K_0))$ stetig, folgt, daß $\tilde{\phi}_a$ multiplikativ auf ganz $\mathcal{E}^{(\text{Mp})}(\mathcal{O}(M, K_0))$ ist. Offenbar ist $\tilde{\phi}_a$ linear. Wegen $\tilde{\phi}_a(\rho(f)) = \phi_a(f)$ für $f \in E^{(\text{Mp})}(V, S, K_0)$ und f holomorph auf einer offenen Umgebung von S stimmt $\tilde{\phi}_a$ auf $\rho_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(S))$ mit dem holomorphen Funktionalkalkül überein und ist die einzige stetige Abbildung von $\mathcal{E}^{(\text{Mp})}(\mathcal{O}(M, K_0))$ nach A mit dieser Eigenschaft, da $\rho_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(S))$ dicht in $\mathcal{E}^{(\text{Mp})}(\mathcal{O}(M, K_0))$. Insbesondere ist also $\tilde{\phi}_a(\underline{z}_j) = a_j$ für $j=1, \dots, n$ und $\tilde{\phi}_a(1_S) = e$.

6.7. ' Bem.:

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.3. (C^∞ -Fall) folgt aus Bem. 6.5. und Satz 6.6. sowie Korollar 3.9., daß Bemerkung 6.7. entsprechend gilt, wenn man $\mathcal{E}^{(\text{Mp})}$ durch C^∞ , d.h. $\mathcal{E}^{(\text{Mp})}(\mathcal{O}(M, K_0))$ durch $C^\infty \mathcal{O}(M, K_0)$ und $E^{(\text{Mp})}(V, S, K_0)$ durch $E(V, S, K_0)$ ersetzt.

Wie in §5 ist jetzt lediglich noch nachzuprüfen, ob (6.10) erfüllt ist, wenn eine der Bedingungen (6.2) oder (6.2') gilt. Wir behandeln zunächst Bedingung (6.2) und zeigen dazu das folgende Lemma:

6.8. Lemma :

Es gelte (6.1) und $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(\text{Mp})}(V, S, K_0), A)$ sei wie in (6.5) definiert. Definiere den Teilraum

$$E_0^{(Mp)}(V, S, K_0) := \{ u \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V) \mid \exists \substack{U \subset \mathbb{C}^n \text{ offen} \\ K_0 \subset U \subset V} D^\alpha u(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, x \in S \cup U \}$$

von $E^{(Mp)}(V, S, K_0)$. Dann gilt:

$$(6.12) \quad E_0^{(Mp)}(V, S, K_0) \subset \ker \phi_a$$

Bew.:

Sei also $u \in E_0^{(Mp)}(V, S, K_0)$, dann gilt insbesondere $D^\alpha u(x) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, $x \in M$ und damit kann u in der $\mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ -Topologie durch Funktionen $u_i \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$, $i \in \mathbb{N}$, mit $(\text{supp } u_i) \cap M = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, approximiert werden, (vgl. Bew. Lemma 5.10.).

Sei nun $U \subset \mathbb{C}^n$ eine geeignete offene Umgebung von K_0 mit $U \subset \bar{U} \subset V$, so daß $u \equiv 0$ auf U und sei $W \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $K_0 \subset W \subset \bar{W} \subset U$ und $x \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ mit $x \equiv 1$ auf $V \setminus \bar{U}$ sowie $x \equiv 0$ auf W . Definiere $v_i := x \cdot u_i$ für $i \in \mathbb{N}$, dann ist $v_i \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ und es gilt in $\mathcal{E}^{(Mp)}(V)$:

$$(6.13) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} v_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (x \cdot u_i) = x \cdot \lim_{i \rightarrow \infty} u_i = x \cdot u = u$$

nach Voraussetzung und wegen der Stetigkeit der Multiplikation in $\mathcal{E}^{(Mp)}(V)$. Nun gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, daß $v_i \equiv 0$ auf einer festen offenen Umgebung W von K_0 sowie auf einer offenen Umgebung von S . Nach Satz 6.5. folgt, daß

$$(6.14) \quad \phi_a(v_i) = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Wähle nun W_k aus der Umgebungsbasis von K_0 so, daß $W_k \subset W$, $k \in \mathbb{N}$ fest, dann ist $v_i \in E^{(Mp)}(V, S_k)$, $S_k = S \cup \bar{W}_k$; für alle $i \in \mathbb{N}$ und es gilt $v_i \rightarrow u$ in $E^{(Mp)}(V, S_k)$ und damit auch in $E^{(Mp)}(V, S, K_0)$ für $i \rightarrow \infty$.

Es folgt wegen der Stetigkeit von $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(Mp)}(V, S, K_0), A)$ aus (6.14), daß auch $\phi_a(u) = 0$ gilt. qed.

6.8.' Lemma :

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 6.3. (C^∞ -Fall) und $\phi_a \in \mathcal{L}(E(V, S, K_0), A)$ sei wie in (6.5) definiert. Definiere den Teilraum

$$E_0(V, S, K_0) := \{u \in C^\infty(V) \mid \bigcap_{\substack{U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \\ K_0 \subset U \subset V}} D^\alpha u(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, x \in S \cup U\}$$

von $E(V, S, K_0)$. Dann gilt:

$$(6.12') \quad E_0(V, S, K_0) \subset \ker \phi_a$$

Bew.:

Sei $u \in E_0(V, S, K_0)$, so kann u in der $C^\infty(V)$ -Topologie durch Funktionen $u_i \in C^\infty(V)$, $i \in \mathbb{N}$ approximiert werden, die in einer offenen Umgebung von S verschwinden, (vgl. Bew. Lemma 5.10.'). Der Beweis geht nun völlig analog zum Bew. von Lemma 6.8., wenn man dort $\mathcal{L}^{(M_p)}$ durch C^∞ , d.h. $E^{(M_p)}(V, S_k)$ durch $E(V, S_k)$ und $E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ durch $E(V, S, K_0)$ ersetzt.

qed.

Damit folgt:

6.9. Satz :

Sei $M := S \setminus K_0$ total-reelle $\mathcal{L}^{(M_p)}$ - (bzw. C^∞ -) Untermannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{R}} M = n$ (und es gelte die Bedingung (6.1) (bzw. (6.1''))), dann ist (6.10) erfüllt.

Bew.:

Sei $\mathcal{F} : E^{(M_p)}(V, S, K_0) \rightarrow \mathcal{L}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ (bzw. $\mathcal{F} : E(V, S, K_0) \rightarrow C^\infty \mathcal{O}(M, K_0)$) die kanonische Restriktion, dann zeigen wir, daß

$$(6.15) \quad \ker \mathcal{F} = E_0^{(M_p)}(V, S, K_0) \quad (\text{bzw. } (6.15') \quad \ker \mathcal{F} = E_0(V, S, K_0)),$$

die Behauptung folgt dann aus (6.12) (bzw. (6.12')) .

Offenbar gilt $E_0^{(M_p)}(V, S, K_0) \subset \ker \mathcal{F}$ (bzw. $E_0(V, S, K_0) \subset \ker \mathcal{F}$) .

Sei nun $u \in \ker \mathcal{F}$, dann gilt nach Definition

$$(6.16) \quad \exists \quad u(z_0) = 0 \quad \text{für alle } z_0 \in S \cup U, \text{ sowie} \\ U \subset \mathbb{C}^n \text{ offen} \\ K_0 \subset U \subset V$$

$$(6.17) \quad D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} u(z_0) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, z_0 \in S \cup U, j=1, \dots, n.$$

Insbesondere gilt (6.16) und (6.17) für alle $z_0 \in M$ und damit folgt aus dem Bew. von Satz 5.11., daß

$$(6.18) \quad D^\alpha u(z_0) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, z_0 \in M.$$

Wegen (6.16) gilt (6.18) sogar für alle $z_0 \in S \cup U$, d.h. $u \in E_0^{(M_p)}(V, S, K_0)$ (bzw. $u \in E_0(V, S, K_0)$). qed.

Wir kommen nun zur Bedingung (6.2') und zeigen, daß (6.10) gilt. Zunächst der folgende Satz:

6.10. Satz :

Sei $a_1, \dots, a_n \in A$, es gelte (6.1) und $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(M_p)}(V, S, K_0), A)$ sei wie in (6.5) definiert. Dann gilt für $\psi \in \Delta(A)$, daß

$$(6.19) \quad \widehat{\phi_a}(f)(\psi) = f(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi)) \quad \text{für alle } f \in E^{(M_p)}(V, S, K_0),$$

hierbei bezeichne $\wedge: A \rightarrow C(\Delta(A))$ wieder die Gelfandtransformation.

Bew.:

Sei $f \in E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ vorgegeben, wähle $k \in \mathbb{N}$ fest so, daß $f \in E^{(M_p)}(V, S_k)$, $S_k = S \cup \bar{W}_k$ holomorph-konvex. Aus (3.19) folgt, daß zu $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(W_k)$ pseudokonvexe offene Mengen $U_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$ existieren mit

$$(6.20) \quad T_{(\varepsilon/2)}(S_{k+1}) \subset U_\varepsilon \subset W_k \cup T_{2\varepsilon}(S_{k+1}) \quad \text{und es folgt wie in}$$

(3.26''), daß auf $U_\varepsilon \supset S_{k+1}$ holomorphe Funktionen h_ε existieren mit

$$(6.21) \quad \|f - h_\varepsilon\|_{M_p, \bar{h}, S_{k+1}} := \sup_{x \in S_{k+1}, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}} \frac{|D^\alpha(f - h_\varepsilon)|}{\bar{h}^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \rightarrow 0$$

mit $\varepsilon \rightarrow 0$ für beliebig vorgegebenes $\bar{h} > 0$.

Sei nun $\chi_\varepsilon \in \mathcal{L}^{(M_p)}(V)$ mit $\chi_\varepsilon \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von S_{k+1}

und $(\text{supp } \chi_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$ kompakt, dann definiere $\tilde{h}_\varepsilon := \chi_\varepsilon \cdot h_\varepsilon$ auf U_ε und setze $\tilde{h}_\varepsilon$ durch 0 auf V fort, dann gilt

(6.22) $\tilde{h}_\varepsilon \in E^{(Mp)}(V, S_{k+1})$ und $\tilde{h}_\varepsilon$ holomorph auf einer offenen Umgebung von S sowie

(6.23) $\|f - \tilde{h}_\varepsilon\|_{M_p, \bar{h}, S_{k+1}} \rightarrow 0$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ für beliebig vorgegebenes $\bar{h} > 0$.

Seien nun $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ mit $0 \leq \tilde{x}_1(x)$, $\tilde{x}_2(x) \leq 1$, und $\tilde{x}_1 \equiv 1$ auf W_{k+2} , $\text{supp } \tilde{x}_1 \subset W_{k+1}$ kompakt sowie $D^\alpha \bar{\partial} \tilde{x}_1(x) = 0$ für $x \in S_{k+2}, \alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ (eine solche Funktion existiert nach Korollar 1.12.), außerdem

$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von S_{k+2} und $(\text{supp } \tilde{x}_2) \subset V$ kompakt. Sei nun $\psi \in \Delta(A)$ beliebig aber fest, dann definiert $\psi \circ \phi_a$ eine stetige Linearform auf $E^{(Mp)}(V, S_{k+2})$. Da $E^{(Mp)}(V, S_{k+2})$ die $\mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ -Topologie trägt, kann $\psi \circ \phi_a$ nach dem Satz von Hahn-Banach zu $T \in \mathcal{E}'^{(Mp)}(V)$ fortgesetzt werden. Definiere $T_2 := \tilde{x}_2 \cdot T \in \mathcal{E}'^{(Mp)}(V)$, dann gilt $(\text{supp } T_2) \subset K := S \setminus W_{k+2} = M \setminus W_{k+2} \subset M$, wobei $K = S \setminus W_{k+2}$ kompakt. Ist nämlich $u \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V)$ mit $(\text{supp } u) \subset V \setminus K$, dann ist $u \equiv 0$ auf einer offenen Umgebung von $K = S \setminus W_{k+2}$ und damit

$$(6.24) \quad \langle T_2, u \rangle = \langle \tilde{x}_2 \cdot T, u \rangle = \langle T, \tilde{x}_2 \cdot u \rangle = \langle \psi \circ \phi_a, \tilde{x}_2 \cdot u \rangle \\ = \langle \psi, \phi_a(\tilde{x}_2 \cdot u) \rangle = 0,$$

da $\tilde{x}_2 \cdot u \equiv 0$ auf einer offenen Umgebung von $S \cup W_{k+2}$ und damit $\phi_a(\tilde{x}_2 \cdot u) = 0$, vgl. Satz 6.5.. Völlig analog zum Beweis von (5.31) im Bew. von Satz 5.13. können wir zeigen, daß für $f \in E^{(Mp)}(V, S_{k+2})$ gilt

$$(6.25) \quad |\langle T_2, f \rangle| \leq C \cdot \|f\|_{M_p, \bar{h}_1, K_1} \quad \text{für geeignete } C > 0, \bar{h}_1 > 0$$

und K_1 kompakt mit $K \subset K_1 \subset M$. Ebenso gilt für $T_1 := \tilde{x}_1 \cdot T \in \mathcal{E}'^{(Mp)}(V)$ und $f \in E^{(Mp)}(V, S_{k+2})$:

$$(6.26) \quad |\langle T_1, f \rangle| = |\langle T, \tilde{x}_1 \cdot f \rangle| = |\langle \psi \circ \phi_a, \tilde{x}_1 \cdot f \rangle| =$$

$$|\langle \psi, \phi_a(\tilde{x}_1 \cdot f) \rangle_{A', A}| \leq \|\phi_a(\tilde{x}_1 \cdot f)\|_A \leq \quad (6.9)$$

$$C \cdot \|\tilde{x}_1 \cdot f\|_{M_p, \bar{h}_2, S_{\varepsilon_0}} \quad (\text{für } C > 0, \bar{h}_2 > 0 \text{ geeignet.}) \leq$$

$$C \cdot \|\tilde{x}_1 \cdot f\|_{M_p, \bar{h}_2, \overline{W_{k+1}}} \quad (\text{da } \text{supp } \tilde{x}_1 \subset W_{k+1}.) \leq$$

$$(C + M_0) \cdot \|\tilde{x}_1\|_{M_p, (\bar{h}_2/2), \overline{W_{k+1}}} \cdot \|f\|_{M_p, (\bar{h}_2/2), \overline{W_{k+1}}} \quad \text{mit}$$

Komatsu [29], Prop. 2.7. . Insgesamt folgt für $f \in E^{(M_p)}(V, S_{k+2})$, daß

$$(6.27) \quad |(\psi \circ \phi_a)(f)| = |(\psi \circ \phi_a)((\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) \cdot f)| = |\langle T, (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) \cdot f \rangle| \\ \leq |\langle T_1, f \rangle| + |\langle T_2, f \rangle| \leq C \cdot \|f\|_{M_p, \bar{h}_3, S_{k+1}} \quad \text{für}$$

geeignetes $C > 0, \bar{h}_3 > 0$.

Damit folgt für $\tilde{h}_\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, aus (6.22) und das vorgegebene $f \in E^{(M_p)}(V, S_k)$:

$$(6.28) \quad |\widehat{\phi_a(f)}(\psi) - f(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi))| \leq$$

$$|(\psi \circ \phi_a)(f) - \tilde{h}_\varepsilon(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi))| +$$

$$|\tilde{h}_\varepsilon(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi)) - f(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi))| \quad (5.21)$$

$$|(\psi \circ \phi_a)(f - \tilde{h}_\varepsilon)| + |\tilde{h}_\varepsilon(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi)) - f(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi))| \leq$$

$$C \cdot \|f - \tilde{h}_\varepsilon\|_{M_p, \bar{h}_3, S_{k+1}} + |\tilde{h}_\varepsilon(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi)) - f(\hat{a}_1(\psi), \dots, \hat{a}_n(\psi))| \leq \quad (6.27)$$

$$(C + M_0) \cdot \|f - \tilde{h}_\varepsilon\|_{M_p, \bar{h}_3, S_{k+1}} \rightarrow 0 \quad \text{mit } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ nach (6.23).}$$

Damit ist (6.19) bewiesen.

qed.

Ebenso können wir zeigen:

6.10.' Satz :

Sei $a_1, \dots, a_n \in A$, es gelte (6.1'') und $\phi_a \in \mathcal{L}(E(V, S, K_0), A)$ sei wie in (6.5) definiert, vgl. Bem. 6.5.'. Dann gilt für $\Psi \in \Delta(A)$, daß

$$(6.19') \quad \widehat{\phi_a}(f)(\Psi) = f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) \quad \text{für alle } f \in E(V, S, K_0) .$$

Bew.:

Sei $f \in E(V, S, K_0)$ vorgegeben, wähle $k \in \mathbb{N}$ fest so, daß $f \in E(V, S_k)$. Es folgt aus Korollar 3.9.', (3.27), daß Funktionen $\tilde{h}_\varepsilon \in E(V, S_{k+1})$ existieren, die holomorph auf einer offenen Umgebung von S_{k+1} sind und für die gilt

$$(6.23') \quad \|f - \tilde{h}_\varepsilon\|_{m, S_{k+1}} := \sup_{x \in S_{k+1}, |\alpha| \leq m} |D^\alpha(f - \tilde{h}_\varepsilon)(x)| \rightarrow 0 \quad \text{mit}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ für jedes fest vorgegebene $m \in \mathbb{N}$; man vergleiche den Bew. zu Satz 6.10.. Analog zum Beweis von Satz 6.10. erhält man für fest vorgegebenes $\Psi \in \Delta(A)$ und alle $f \in E(V, S_{k+2})$, daß

$$(6.27') \quad |(\Psi \circ \phi_a)(f)| \leq C \cdot \|f\|_{m, S_{k+1}} \quad \text{für geeignetes } C > 0 \text{ und } m \in \mathbb{N},$$

vgl. hierzu Satz 5.13.'. Die Behauptung (6.19') folgt nun ebenso wie in

(6.28) . qed.

Aus Satz 6.10. bzw. Satz 6.10.' folgt nun:

6.11. Satz :

Seien $a_1, \dots, a_n \in A$ und A sei halbeinfach, (es gelte die Bedingung (6.1) bzw. (6.1'')). Dann ist (6.10) erfüllt, d.h. es gilt $\phi_a(\ker \mathcal{F}) = 0$, wobei $\phi_a \in \mathcal{L}(E^{(M_p)}(V, S, K_0), A)$ (bzw. $\phi_a \in \mathcal{L}(E(V, S, K_0), A)$) wie in (6.5) und $\mathcal{F}: E^{(M_p)}(V, S, K_0) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}\mathcal{O}(M, K_0)$ (bzw. $\mathcal{F}: E(V, S, K_0) \rightarrow C^\infty\mathcal{O}(M, K_0)$) die kanonische Restriktion.

Bew.:

Sei $f \in E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ (bzw. $f \in E(V, S, K_0)$) und $f \in \ker \mathcal{F}$, d.h. es ist

insbesondere $f|_S = 0$. Für jedes $\Psi \in \Delta(A)$ folgt aus Satz 6.10. bzw. Satz 6.10.', daß gilt $\widehat{\phi_a}(f)(\Psi) = f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) = 0$, da $(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) \in \sigma(a) \subset S$, also ist $\widehat{\phi_a}(f) = 0$. Da A halbeinfach, ist die Gelfandtransformation $\wedge: A \rightarrow C(\Delta(A))$ injektiv, also folgt $\phi_a(f) = 0$. qed.

Damit ist Satz 6.1. und Satz 6.3. vollständig bewiesen!
Wir verweisen auch hier auf Bem. 5.15., die zeigt, daß auf die Bedingung (6.2) oder (6.2') nicht verzichtet werden kann.
Wie in §5 wollen wir noch den Spektralabbildungssatz für $\widetilde{\phi}_a$ zeigen:

6.12. Satz :

Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 6.1. bzw. Satz 6.3. und sei $\widetilde{\phi}_a: \mathcal{E}^{(Mp)}(\mathcal{O}(M, K_0)) \rightarrow A$ (bzw. $\widetilde{\phi}_a: C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0)) \rightarrow A$) die Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls. Dann gilt:

- i) $\widehat{\widetilde{\phi}_a}(g)(\Psi) = g(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))$ für alle $g \in \mathcal{E}^{(Mp)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ (bzw. $g \in C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0))$) und $\Psi \in \Delta(A)$
- ii) $\sigma(\widetilde{\phi}_a(f_1), \dots, \widetilde{\phi}_a(f_m)) = f(\sigma(a))$ für alle $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{E}^{(Mp)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ (bzw. $C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0))$) und $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Bew.:

Zu i): $\mathcal{J}: E^{(Mp)}(V, S, K_0) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ (bzw. $\mathcal{J}: E(V, S, K_0) \rightarrow C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0))$) ist surjektiv nach Satz 6.6., zu $g \in \mathcal{E}^{(Mp)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ (bzw. $C^\infty(\mathcal{O}(M, K_0))$) wähle $f \in E^{(Mp)}(V, S, K_0)$ (bzw. $E(V, S, K_0)$) mit $\mathcal{J}(f) = g$, dann folgt für $\Psi \in \Delta(A)$:

$$\widehat{\widetilde{\phi}_a}(g)(\Psi) = \Psi(\widetilde{\phi}_a(g)) \stackrel{(6.11)}{=} \Psi(\phi_a(f)) \stackrel{(6.19), (6.19')}{=} f(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)) = g(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)), \text{ da } f|_S = g.$$

Zu ii): $\sigma(\widetilde{\phi}_a(f_1), \dots, \widetilde{\phi}_a(f_m)) = \{(\widehat{\widetilde{\phi}_a}(f_1)(\Psi), \dots, \widehat{\widetilde{\phi}_a}(f_m)(\Psi)) : \Psi \in \Delta(A)\} \stackrel{i)}{=} \{(f_1(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi)), \dots, f_m(\hat{a}_1(\Psi), \dots, \hat{a}_n(\Psi))) : \Psi \in \Delta(A)\} =$

$$\{(f_1(z), \dots, f_m(z)) \mid z \in \sigma(a)\} = f(\sigma(a)) \quad \text{qed.}$$

Wir ergänzen diesen Paragraphen durch eine zusätzliche Überlegung (Bem. 6.13.) sowie mit einigen Anwendungen und Beispielen, 6.14..

6.13. Bemerkung :

Die kompakte Menge $S \subset \mathbb{C}^n$ erfülle die Voraussetzungen von Satz 3.9. und es sei $\dim_{\mathbb{R}} M = n$. Sei v eine $\mathbb{C}$ -wertige $(0, n-1)$ -Differentialform auf $\mathbb{C}^n \setminus S$ mit C^∞ -Koeffizienten, (Schreibweise: $v \in C^\infty_{(0, n-1)}(\mathbb{C}^n \setminus S)$), falls

$$v = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n} g_{j_1 \dots j_{n-1}} d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{n-1}} \quad \text{schreibe } |v(z)| :=$$

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n} |g_{j_1 \dots j_{n-1}}(z)| \quad . \text{ Es gelte}$$

$$1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq n$$

$$i) \quad \forall_{k \in \mathbb{N}} \quad \exists_{\substack{L > 0 \\ C > 0}} \quad |v(z)| \leq C \cdot \exp\left(M^*\left(\frac{L}{d(z, S_k)}\right)\right) \quad \text{für } z \in V \setminus S_k \quad ,$$

wobei $V \subset \mathbb{C}^n$ offene beschränkte Umgebung von S , $S_k = S \cup \bar{W}_k$,

$(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in Satz 3.9. und M^* die zu $M_p/p!$ assoziierte Funktion,

sowie

$$ii) \quad \bar{\partial} v = 0 \quad .$$

Dann folgt:

$$\text{Durch } f \xrightarrow{T} \int_{V \setminus S} \bar{\partial}(f \cdot y) \wedge v \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \quad , \text{ wobei } y \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V) \text{ fest}$$

mit $y \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung von S und $(\text{supp } y) \subset V$ kompakt, wird eine stetige Linearform auf $E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ definiert (dies folgt wie in Satz 6.5.). Wegen $\bar{\partial} v = 0$ gilt für $u \in E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ mit $u \equiv 0$ auf einer offenen Umgebung von S , daß $T(u) = 0$. Es ist nämlich

$$T(u) = \int_{V \setminus S} \bar{\partial}(u \cdot y) \wedge v \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = \int_{V \setminus S} \bar{\partial}(u \cdot y \cdot v) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n =$$

$$\int_{V \setminus S} d(u \cdot y \cdot v \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) = 0 \quad \text{nach dem Satz von Stokes, da}$$

$u \cdot y \cdot v$ kompakten Support in $V \setminus S$ hat.

Da aber für die Restriktion $\rho: E^{(M_p)}(V, S, K_0) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ gilt,

daß $T(\ker \rho) = 0$ (vgl. Bem. 6.7., Lemma 6.8. und Satz 6.9.), wird

durch $T = \tilde{T} \circ \rho$ eine stetige Linearform $\tilde{T}$ auf $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ definiert.

Damit haben wir erhalten:

Jedes $v \in C^\infty_{(0, n-1)}(\mathbb{C}^n \setminus S)$, das i) und ii) erfüllt, definiert ein

$$\tilde{T}_v \in (\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0))'.$$

Wir bemerken noch, daß für $v, v' \in C^\infty_{(0, n-1)}(\mathbb{C}^n \setminus S)$ mit i) und ii), so

daß $v - v' = \bar{\partial} g$, gilt: $\tilde{T}_v = \tilde{T}_{v'}$, ($n \geq 2$).

Sei nämlich $f \in \mathcal{O}(S) \subset \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ und $\tilde{f} \in E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ Fortsetzung

von f , so setze $h := \bar{\partial}(\tilde{f} \cdot y)$, dann ist

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_v - \tilde{T}_{v'}) (f) &= \int_{V \setminus S} h \wedge (v - v') \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = \int_{V \setminus S} h \wedge \bar{\partial} g \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= - \int_{V \setminus S} \bar{\partial} (h \wedge g) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ &= - \int_{V \setminus S} d(h \wedge g \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) = 0 \quad \text{nach dem Satz von} \end{aligned}$$

Stokes, da $h \wedge g$ kompakten Support in $V \setminus S$ hat. Da $\mathcal{O}(S)$ dicht in

$\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ (Satz 3.9.), folgt $\tilde{T}_v = \tilde{T}_{v'}$.

Hiermit ergibt sich der folgende Zusammenhang zu Gramsch [18], 6.1. und [19], 4.1.:

Dort wird unter der Voraussetzung

$$\text{iii)} \quad \bigvee_{a' \in A'} \quad \exists \quad \bigvee_{\substack{x' \in E' \\ f \in \mathcal{O}(S) \subset E \\ \text{dicht}}} \langle f, x' \rangle_{E, E'} = \langle \phi_a(f), a' \rangle_{A, A'}$$

(sowie geeigneter Bedingungen an E und E' , so daß der Graphensatz anwendbar ist) mithilfe der dort entwickelten Schwach-Stark Fortsetzungssätze gefolgert:

Es existiert eine eindeutige stetige, lineare und multiplikative Fortsetzung $\tilde{\phi}_a: E \rightarrow A$ von $\phi_a: \mathcal{O}(S) \rightarrow A$.

Die oben durchgeführte Überlegung für skalare Differentialformen

$v \in C^\infty(0, n-1)(\mathbb{C}^n \setminus S)$ zeigt nun, daß die Voraussetzung iii) für $E :=$

$\mathcal{E}^{(Mp)}(\mathcal{O}(M, K_0))$ erfüllt ist, wenn die skalare Differentialform

$$v := - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \langle \omega, a' \rangle_{A, A'} =$$

$$- \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \langle \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \overline{\partial} u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\overline{\partial} u_j} \wedge \dots \wedge \overline{\partial} u_n, a' \rangle_{A, A'}$$

(vgl. (4.18)) die Wachstumsbedingung i) erfüllt, (vgl. Satz 6.1. (6.1)).

Beachte, daß ii), d.h. $\overline{\partial} v = 0$, hier immer erfüllt ist, (siehe Lemma

4.6.). Jetzt kann man nämlich $x' \in E'$ als $x' := \tilde{T}_v$ wählen und erhält für

$f \in \mathcal{O}(S)$ (und $\tilde{f} \in \mathcal{E}^{(Mp)}(V, S, K_0)$ Fortsetzung von f):

$$\langle f, x' \rangle_{E, E'} = \langle f, \tilde{T}_v \rangle_{E, E'} = \int_{V \setminus S} \overline{\partial}(\tilde{f} \cdot y) \wedge v \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

$$= - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus S} \overline{\partial}(\tilde{f} \cdot y) \wedge \langle \omega, a' \rangle_{A, A'} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

$$= \langle - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{V \setminus S} \overline{\partial}(\tilde{f} \cdot y) \wedge \omega \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, a' \rangle_{A, A'}$$

$$= \langle \phi_a(f), a' \rangle_{A, A'}$$

Satz 4.7.

Hieraus ersieht man, daß für die Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls auf gewisse topologische Algebren E , die $\mathcal{O}(S)$ dicht enthalten, nur eine geeignete Beschreibung des (skalaren) Dualraums E' von E benötigt wird.

6.14. Anwendungen und Beispiele :

i) Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine total-reelle C^∞ - (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$ -) Untermannigfaltigkeit, dann sind die Algebren $C^\infty(M)$ bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ Basialgebren im Sinne von Albrecht [1], Def. 2.2., sowie zulässige Algebren, siehe Albrecht [3]

und Albrecht/Frunzä [5]. Damit gilt für ein n -Tupel $T=(T_1, \dots, T_n)$ kommutierender Operatoren $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, für das eine Fortsetzung des holomorphen Funktionalkalküls auf $C''(M)$ bzw. $\mathcal{L}^{(M_p)}(M)$ existiert gemäß Satz 5.3. bzw. Satz 5.1. (vgl. Bem. 4.12.), daß $T=(T_1, \dots, T_n)$ zerlegbar ist und eine spektrale Kapazität besitzt, siehe Albrecht [3], Theorem 3.3. .

Ist $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $K_0 \subset S$ kompakte Teilmenge so, daß $M := S \setminus K_0$ total-reelle C^∞ - (bzw. $\mathcal{L}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$, so sind die Algebren $C^\infty \mathcal{O}(M, K_0)$ bzw. $\mathcal{L}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ Ω -Basisalgebren im Sinne von Albrecht [1], Def. 2.2., für $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus K_0$.

ii) Sei H ein Hilbertraum, für einen kompakten Operator $B \in \mathcal{L}(H)$ seien $\{\mu_j(B)\}_{j \in \mathbb{N}_+}$ die Eigenwerte des positiven, selbstadjungierten kompakten Operators $(B^*B)^{1/2}$, die $\mu_j(B)$ seien der Größe nach fallend geordnet und entsprechend ihrer Vielfachheit wiederholt. Bezeichne

$$C_q(H) := \{B \in \mathcal{L}(H) \mid B \text{ kompakt und } \|B\|_q := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(B)^q \right)^{1/q} < \infty\} \text{ für } 0 < q < \infty$$

Sei nun $R \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator und $B \in C_q(H)$ für ein $0 < q < \infty$ und sei außerdem $T := R + B$. Es gelte $\sigma(T) \subset M$ und $\sigma(R) \subset M$, wobei $M \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte $\mathcal{L}^{(p^S)}$ -Untermannigfaltigkeit, $s = 1 + \frac{1}{q+1}$, $\dim_{\mathbb{R}} M = 1$, (d.h. M ist eine $\mathcal{L}^{(p^S)}$ -Kurve) .

Es folgt, daß Konstanten $C > 0$ und $L > 0$ existieren mit

$$(6.29) \quad \|(zI - T)^{-1}\| \leq C \cdot \exp\left(\frac{L}{d(z, M)^{q+1}}\right) \quad \text{für alle } z \in V \setminus \overline{M}, \text{ wobei}$$

$V := \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, M) \leq 1\}$. Zum Beweis siehe Kitano [28], beachte dabei

$$\text{die Zerlegung } (zI - T)^{-1} = (zI - R)^{-1} \cdot \frac{1}{\delta(z)} \cdot \delta(z) (I - B(zI - R)^{-1})^{-1} \text{ für}$$

$z \in V \setminus M$, wobei $\delta(z) := \det_k(I - B(zI - R)^{-1})$ für $k \in \mathbb{N}_+$ mit $k-1 < q \leq k$,

vgl. Dunford/Schwartz [14], XI,9., S.1088 - 1119 .

Damit ist Satz 5.1. für die kommutative Banach-Unteralgebra $(T)'' \subset \mathcal{L}(H)$

anwendbar (vgl. Bem. 4.12., insbesondere $\sigma_{\mathcal{L}(H)}(T) = \sigma_{(T)'', (T)}$), d.h. es existiert eine eindeutig bestimmte stetige, lineare und multiplikative Fortsetzung $\tilde{\phi}_T: \mathcal{L}^{(p|s)}(M) \rightarrow (T)'' \subset \mathcal{L}(H)$ des holomorphen Funktionalkalküls für $T \in \mathcal{L}(H)$. Zu der Resolventenabschätzung (6.29) vergleiche man auch Radjavi/Rosenthal [42], Lemma 6.11., und für $M \subset \mathbb{R}$ bzw. $M = S^1$ Colojoară/Foiaş [12], Chap. V, Theorem 5.2.; außerdem verweisen wir auf die Resolventenabschätzungen von Zsido [63] für Operatoren auf Banachräumen, siehe auch die dort zitierte Literatur.

iii) Gewichtete Shiftoperatoren auf separablen Hilberträumen

Sei $\rho = (\rho_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen mit

$$(6.30) \quad \rho_0 = 1$$

$$(6.31) \quad \rho_{m+l} \leq \rho_m \cdot \rho_l \quad \text{für alle } m, l \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$(6.32) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (\rho_m)^{1/m} = 1$$

Als Beispiel nennen wir die Folge $(1+m)^k$, $k \in \mathbb{N}$ fest, und die Folge $\exp(L \cdot m^{1/s})$, $L > 0$, $s > 1$ fest.

Wir definieren den Hilbertraum $l^2(\rho)$ durch

$$(6.33) \quad l^2(\rho) := \{(\alpha_q)_{q \in \mathbb{Z}^n} \mid \|(\alpha_q)\| := \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_q|^2 \rho_{|q|}^2 \right)^{1/2} < \infty, \alpha_q \in \mathbb{C}\},$$

die Norm $\| \cdot \|$ wird durch das Skalarprodukt $((\alpha_q), (\beta_q)) =$

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}^n} \alpha_q \cdot \overline{\beta_q} \cdot \rho_{|q|}^2 \quad \text{auf } l^2(\rho) \text{ induziert.}$$

Zu $q \in \mathbb{Z}^n$ bezeichne $e_q \in l^2(\rho)$ das Element $e_q = (e_{p,q})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ mit $e_{p,q} = 1$ für $p = q$ und $e_{p,q} = 0$ für $p \neq q$, dann wird durch

$$(6.34) \quad \tilde{e}_q := \frac{1}{\rho_{|q|}} \cdot e_q, \quad q \in \mathbb{Z}^n, \text{ eine Orthonormalbasis in } l^2(\rho)$$

definiert.

Wir definieren nun die Operatoren $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{L}(l^2(\rho))$ durch

$$(6.35) \quad T_j((\alpha_q)_{q \in \mathbb{Z}^n}) = (\alpha_{q-\epsilon_j})_{q \in \mathbb{Z}^n}, \text{ wobei } \epsilon_j = (\delta_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}^n,$$

$j=1, \dots, n$, und nennen T_j bilateralen Shiftoperator (der j -ten Komponente). Offenbar gilt $T_j(e_q) = e_{q+\epsilon_j}$ für $j=1, \dots, n$, $q \in \mathbb{Z}^n$ und $T_i T_j = T_j T_i$ für $1 \leq i, j \leq n$. Außerdem haben wir:

$$a) \quad \|T_j\| \leq \rho_1 \quad \text{für } j=1, \dots, n$$

$$b) \quad \sigma(T_j) \subset \{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| = 1\} \quad \text{für } j=1, \dots, n \quad \text{und}$$

$$c) \quad \sigma(T_1, \dots, T_n, l^2(\rho)) = M := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\},$$

hierbei bezeichne $\sigma(T_1, \dots, T_n, l^2(\rho))$ das Taylorspektrum von $T_1, \dots, T_n$, vgl. §4.

Bew.:

Zu a) und b): Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $(\alpha_q) \in l^2(\rho)$, dann gilt für $j=1, \dots, n$ (wir bezeichnen für $m < 0$ $T_j^m := (T_j^{-1})^{|m|}$)

$$\|T_j^m((\alpha_q))\| = \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_{q-m\epsilon_j}|^2 \rho(q)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_q|^2 \rho(q+m\epsilon_j)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\left(\sum_{q \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_q|^2 \rho(q)^2 \rho(m)^2 \right)^{1/2} = \rho(m) \|(\alpha_q)\|. \text{ Es folgt } \|T_j^m\| \leq \rho(m),$$

insbesondere also $\|T_j\| \leq \rho_1$, also gilt a). Mit (6.32) folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_j^m\|^{1/m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m^{1/m} = 1 \quad \text{und ebenso} \quad \lim_{m \rightarrow -\infty} \|T_j^{-m}\|^{1/m} \leq$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m^{1/m} = 1, \text{ woraus folgt, daß } \sigma(T_j) \subset D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \text{ sowie } \sigma(T_j^{-1}) \subset D, \text{ also gilt b).}$$

Zu c): Offenbar gilt $\sigma(T_1, \dots, T_n, l^2(\rho)) \subset \sigma(T_1) \times \dots \times \sigma(T_n) \subset M$. Da M total-reell (siehe §1, Bem. 1.4. v), folgt mit Bem. 4.12., daß

$$\sigma(T_1, \dots, T_n, l^2(\rho)) = \sigma_{(T)}((T_1, \dots, T_n)), \text{ wobei wieder } (T)' \subset \mathcal{L}(l^2(\rho))$$

den Bikommutanten von $T = (T_1, \dots, T_n)$ bezeichne. Angenommen, es existiert

$z=(z_1,\dots,z_n)\in M$, (d.h. $|z_1|=\dots=|z_n|=1$), mit $z\notin \mathcal{G}_{(T)}, (T_1,\dots,T_n)$,

dann existieren $B_1,\dots,B_n\in(T)''$ mit $\sum_{j=1}^n (z_j I - T_j) B_j = I$. Sei nun

$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in M$ beliebig, dann setze $\mu_j:=\lambda_j\cdot\bar{z}_j$, $S_j:=\mu_j\cdot T_j$,

$\tilde{B}_j:=\bar{\mu}_j\cdot B_j$ für $j=1,\dots,n$ und $U\in\mathcal{L}(l^2(\rho))$ sei definiert durch

$U(e_q):=\bar{\mu}_1^{q_1}\dots\bar{\mu}_n^{q_n}e_q$ für alle $q=(q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{Z}^n$, dann ist $U^*(e_q)=$

$\mu_1^{q_1}\dots\mu_n^{q_n}e_q$, also ist U unitär und $U^*T_jU=S_j$, (vgl. hierzu

auch Jewell/Lubin [27], Abschnitt 2). Definiere nun $V_j'\in\mathcal{L}(l^2(\rho))$

durch $V_j:=U\tilde{B}_jU^*$ für $j=1,\dots,n$, dann gilt $V_j\in(T)'$, ($(T)'$ bezeichne

den Kommutant von $T=(T_1,\dots,T_n)$), denn

$T_iV_j=T_iU\tilde{B}_jU^*=UU^*T_iU\tilde{B}_jU^*=US_i\tilde{B}_jU^*=U\tilde{B}_jS_iU^*=$

$U\tilde{B}_jU^*US_iU^*=V_jT_i$, wobei $i\in\{1,\dots,n\}$.

Außerdem gilt für $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in M$, daß

$$\begin{aligned} (6.36) \quad \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - T_j) V_j &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - T_j) U \tilde{B}_j U^* = \sum_{j=1}^n (\lambda_j I - U S_j U^*) U \tilde{B}_j U^* \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j U \tilde{B}_j U^* - U S_j \tilde{B}_j U^*) = U \left(\sum_{j=1}^n (\lambda_j I - S_j) \tilde{B}_j \right) U^* \\ &= U \left(\sum_{j=1}^n (\lambda_j I - \mu_j T_j) \bar{\mu}_j B_j \right) U^* = U \left(\sum_{j=1}^n (z_j I - T_j) B_j \right) U^* = U U^* = I \end{aligned}$$

Damit folgt aber, daß $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\notin\mathcal{G}_{(T)}, (T_1,\dots,T_n)$, also $\lambda\notin$

$\mathcal{G}(T_1,\dots,T_n,l^2(\rho))$; da $\lambda\in M$ beliebig war, folgt also $\mathcal{G}(T_1,\dots,T_n,l^2(\rho))$

$=\emptyset$, Widerspruch. Also gilt c). qed.

Es gelte nun, daß Konstanten $C>0$ und $L>0$ existieren, so daß

(6.37) $\rho_m \leq C \cdot \exp(M(L \cdot m))$ für alle $m\in\mathbb{N}_+$, $M(x)$ bezeichne wieder die

assoziierte Funktion zu einer Folge M_p , $p\in\mathbb{N}$, die $(\widetilde{M}1)$, $(M2)$ und $(M3)$ erfülle, (siehe §1, S.5).

Dann existieren Konstanten $C_1 > 0$, $L_1 > 0$ und zu $z = (z_1, \dots, z_n) \in V \setminus M$,
 $V := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, M) \leq 1/2\}$, ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $|z_j| \neq 1$, so daß

$$(6.38) \quad \|(z_j I - T_j)^{-1}\| \leq C_1 \cdot \exp(M^*(\frac{L_1}{d(z, M)})) \quad , \text{ hierbei sei } M^*(x) \text{ die}$$

assoziierte Funktion zu $M_p/p!$.

Bew.:

Sei $z = (z_1, \dots, z_n) \in V \setminus M$, wähle $j \in \{1, \dots, n\}$ so, daß $0 < d(z_j, S^1) =$

$\max_{1 \leq i \leq n} d(z_i, S^1)$, wobei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dann folgt

$d(z, M) \leq \tilde{C}_n \cdot d(z_j, S^1)$, wobei $\tilde{C}_n > 0$ Konstante, die nur von $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

Sei zunächst $|z_j| > 1$, dann gilt für $t := (1/|z_j|) < 1$:

$$(6.39) \quad \|(z_j I - T_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(l^2(\rho))} = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z_j^{m+1}} T_j^m \right\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} t^{m+1} \|T_j^m\| \leq$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m \rho_m \leq C \cdot \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{L^p m^p M_0}{M_p} = C \cdot M_0 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{L^p}{M_p} \sum_{m=0}^{\infty} t^m m^p \leq$$

$$C \cdot M_0 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{L^p}{M_p} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dt}\right)^p (t^{m+p}) = C \cdot M_0 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{L^p}{M_p} \left(\frac{d}{dt}\right)^p \left(\frac{t^p}{1-t}\right) \leq$$

$$C \cdot M_0 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{L^p}{M_p} \cdot 2^p \cdot p! \cdot \frac{1}{(1-t)^{p+1}} = C \cdot M_0 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2L)^p p!}{M_p} \cdot |z_j|^{p+1} \cdot \frac{1}{(|z_j| - 1)^{p+1}} \leq$$

$$2 \cdot C \cdot M_0 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(4 \cdot L)^p p!}{M_p} \cdot \frac{1}{d(z_j, S^1)^{p+1}} \leq \quad (M2)$$

$$\tilde{C} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(4 L H)^{p+1} (p+1)!}{M_{p+1}} \cdot \frac{1}{d(z_j, S^1)^{p+1}} \leq C_1 \cdot \exp(M^*(\frac{\tilde{L}}{d(z_j, S^1)})) \leq$$

$$C_1 \cdot \exp(M^*(\frac{L_1}{d(z, M)})) \quad \text{mit } \tilde{L} := 8 \cdot L \cdot H \quad \text{und } L_1 := \tilde{C}_n \cdot L, \text{ beachte,}$$

daß $M^*(x)$ monoton wachsend ist für $x \in \mathbb{R}_+$.

Ist $|z_j| < 1$, dann gilt mit $t := |z_j| < 1$:

$$(6.39') \quad \|(z_j I - T_j)^{-1}\| = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} z_j^m T_j^{-(m+1)} \right\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} t^m \|T_j^{-(m+1)}\| \leq$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m \rho_{m+1} \leq \rho_1 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} t^m \rho_m, \text{ der Rest der Abschätzung folgt}$$

analog wie in (6.39) .

ged.

Damit existieren zu $z = (z_1, \dots, z_n) \in V \setminus M$ Elemente $b_1^z, \dots, b_n^z \in \langle T \rangle^{**} \subset$

$\mathcal{L}(l^2(\rho))$ mit $\sum_{j=1}^n (z_j I - T_j) b_j^z = I$ und $\|b_j^z\| \leq C_1 \cdot \exp(M^*(\frac{L_1}{d(z, M)}))$ für

geeignetes $C_1 > 0$, $L_1 > 0$ und $j=1, \dots, n$, wähle nämlich

$$b_j^z := (z_j I - T_j)^{-1} \text{ für ein } j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } d(z, S^1) = \max_{1 \leq i \leq n} d(z_i, S^1) > 0$$

und $b_{j'}^z := 0$ für $j' \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$. Zusammen mit Bem. 4.9., (4.25),

(4.27') bedeutet dies, daß die Voraussetzungen zu Satz 5.1. erfüllt

sind, (beachte, daß $\exp(M^*(x)) \leq 2 \cdot \exp(M^*(2x))$ für $x \in \mathbb{R}_+$).

$M = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ ist eine total-reelle, reell-analytische

Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^n$ (vgl. Bem. 1.4. v) , $\sigma(T_1, \dots, T_n, l^2(\rho)) =$

$\sigma_{\langle T \rangle^{**}}(T_1, \dots, T_n) \subset M$ und die Wachstumsbedingung (5.1) ist erfüllt

für eine gemäß Bem. 4.9. gewählte Differentialform ω . Außerdem gilt natürlich (5.2). Damit existiert nach Satz 5.1. ein stetiger Algebra-

homomorphismus $\tilde{\Phi}_{(T_1, \dots, T_n)}: \mathcal{E}^{(M_p)}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(l^2(\rho))$ mit

$\tilde{\Phi}_{(T_1, \dots, T_n)}(1) = I$ und $\tilde{\Phi}_{(T_1, \dots, T_n)}(z_j) = T_j$ für $j=1, \dots, n$, der

den holomorphen Funktionalkalkül für $T = (T_1, \dots, T_n)$ eindeutig fortsetzt.

Als Spezialfall bemerken wir den Fall $M_p := p^{1/s}$ für beliebiges, aber

festes $s > 1$ und $\rho_m := \exp(m^{1/s})$.

Genauso wie oben zeigt man: Falls für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt, daß

(6.37') $\rho_m \leq C \cdot (1+m)^k$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so folgt für eine Konstante

$C_1 > 0$, daß

$$(6.38') \quad \|(z_j I - T_j)^{-1}\| \leq C_1 \frac{1}{d(z, M)^{k+1}} \quad \text{für alle } z \in V \setminus M \text{ und ein}$$

$j \in \{1, \dots, n\}$ mit $|z_j| \neq 1$.

Damit folgt aus Bem. 4.9. und Satz 5.3., daß eine eindeutig bestimmte stetige, lineare und multiplikative Fortsetzung $\tilde{\Phi}_{(T_1, \dots, T_n)}: \mathcal{C}''(M) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}^2(\rho))$ des holomorphen Funktionalkalküls existiert.

Definieren wir nun die Folge $w_q^j := \frac{\rho |q + \varepsilon_j|}{\rho |q|}$ für alle $q \in \mathbb{Z}^n$ und

$j \in \{1, \dots, n\}$ fest, so ist der Operator $T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^2(\rho))$ gegeben durch

$T_j(\tilde{e}_q) = w_q^j \cdot \tilde{e}_{q+\varepsilon_j}$ für alle $q \in \mathbb{Z}^n$, dabei sei $(\tilde{e}_q)_{q \in \mathbb{Z}^n}$ die Orthonormal-

basis in $\mathcal{H}^2(\rho)$ aus (6.34). Beachte, daß $1/(\rho_1) \leq w_q^j \leq \rho_1$ für alle

$q \in \mathbb{Z}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Bezüglich der Orthonormalbasis $(\tilde{e}_q)_{q \in \mathbb{Z}^n}$ wird T_j ,

$j=1, \dots, n$, also durch die Matrix $A_j = ((a_{p,q}^j))_{p,q \in \mathbb{Z}^n}$ mit $a_{p,q}^j :=$

$(T_j(\tilde{e}_q), \tilde{e}_p) = (w_q^j \cdot \tilde{e}_{q+\varepsilon_j}, \tilde{e}_p)$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}^n$ dargestellt, beachte

$T_j(\tilde{e}_q) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_{p,q}^j \cdot \tilde{e}_p$. Wir bemerken noch, daß der Operator $T_j^* T_j \in$

$\mathcal{L}(\mathcal{H}^2(\rho))$ durch die Matrix $B_j = ((b_{p,q}^j))_{p,q \in \mathbb{Z}^n}$ mit $b_{p,q}^j :=$

$(w_q^j)^2 (\tilde{e}_p, \tilde{e}_q)$ gegeben ist, sowie $T_j T_j^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^2(\rho))$ durch die Matrix

$D_j = ((d_{p,q}^j))_{p,q \in \mathbb{Z}^n}$ mit $d_{p,q}^j := (w_{q-\varepsilon_j}^j)^2 (\tilde{e}_q, \tilde{e}_p)$ für $j=1, \dots, n$.

Ist nun H ein beliebiger separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis

$(f_q)_{q \in \mathbb{Z}^n}$, so können wir die oben definierte Matrix $A_j = ((a_{p,q}^j))_{p,q \in \mathbb{Z}^n}$

auch als Element von $\mathcal{L}(H)$ auffassen mittels $A_j(f_q) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_{p,q}^j f_p$, für

$j \in \{1, \dots, n\}$.

Für $A_j \in \mathcal{L}(H)$, $j=1, \dots, n$, gelten nun die gleichen Aussagen wie für

$T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^2(\rho))$. Sei insbesondere $\rho_m := \exp(m^{1/s})$ für alle $m \in \mathbb{N}$, wobei

$s > 1$ beliebig aber fest, so kann $A_1, \dots, A_n$ in Funktionen $f \in \mathcal{L}^{(p,s)}(M)$

'eingesetzt' werden, d.h. $\tilde{\Phi}_{(A_1, \dots, A_n)}(f) \in \mathcal{L}(H)$ ist definiert.

Schreiben wir $f \in \mathcal{X}^{(p|S)}(M)$ in der Fourierentwicklung

$$(6.40) \quad f(z) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} c_q z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n} \quad \text{für } z = (z_1, \dots, z_n) \in M \quad \text{und}$$

$q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$, dann gilt für die Fourierkoeffizienten c_q , $q \in \mathbb{Z}^n$:

Für alle $L > 0$ existiert ein $B > 0$ mit

$$(6.41) \quad |c_q| \leq B \cdot \exp(-M(L \cdot |q|)) \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}^n, \text{ wobei } |q| :=$$

$|q_1| + \dots + |q_n|$, man vergleiche hierzu Komatsu [29], Lemma 3.3. sowie

Petzsche [40], Satz 3.8. . Es bezeichne wieder $M(x)$ die zu $M_p = p!^S$ assoziierte Funktion.

Wir zeigen, daß die Reihe (6.40) in der Topologie von $\mathcal{X}^{(p|S)}(M)$ konvergiert:

Für $t = (t_1, \dots, t_n) \in [0, 2\pi]^n$ schreibe $\tilde{f}(t) := f(\exp(it_1), \dots, \exp(it_n))$,

dann gilt für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $k \in \mathbb{N}_+$:

$$(6.42) \quad |D_t^\alpha \left(\sum_{|q| \geq k} c_q \cdot \exp(i(q_1 t_1 + \dots + q_n t_n)) \right)| \leq$$

$$\sum_{|q| \geq k} |c_q| |D_t^\alpha(\exp(i(q_1 t_1 + \dots + q_n t_n)))| =$$

$$\sum_{|q| \geq k} |c_q| |i^{|\alpha|} q_1^{\alpha_1} \dots q_n^{\alpha_n} \exp(i(q_1 t_1 + \dots + q_n t_n))| \leq$$

$$\sum_{|q| \geq k} |c_q| |q|^{|\alpha|} \leq B \cdot \sum_{|q| \geq k} \frac{M_{|\alpha|+n+2}}{(L \cdot |q|)^{|\alpha|+n+2} \cdot M_0} \cdot |q|^{|\alpha|} \leq$$

$$\frac{B}{M_0} \cdot \frac{M_{|\alpha|+n+2}}{L^{|\alpha|+n+2}} \cdot \sum_{|q| \geq k} \frac{1}{q_1^{n+2}} \leq \frac{B}{M_0} \cdot \frac{M_{|\alpha|+n+2}}{L^{|\alpha|+n+2}} \cdot \sum_{j=k}^{\infty} (2j+1)^n \cdot \frac{1}{j^{n+2}}$$

$$\leq \frac{B}{M_0} \cdot \frac{M_{|\alpha|+n+2}}{L^{|\alpha|+n+2}} \cdot \varepsilon \leq \frac{B \cdot \tilde{A}}{M_0} \cdot (H/L)^{|\alpha|+n+2} \cdot M_{|\alpha|} \cdot M_{n+2} \cdot \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, falls $k \rightarrow \infty$. Es folgt

$$(6.42') \quad \|(\sum_{|q| \geq k} c_q \exp(i(q_1 t_1 + \dots + q_n t_n)))\|_{M_p, (H/L), [0, 2\pi]^n} \leq C_n \cdot \varepsilon \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$ bei beliebig vorgegebenem $L > 0$. Damit konvergiert die Reihe (6.40) in der Topologie von $\mathcal{E}^{(p|S)}(M)$, (vgl. auch Anhang, (7.50)). Ist also $f \in \mathcal{E}^{(p|S)}(M)$ wie in (6.40) definiert, so ist

$$(6.43) \quad \tilde{\Phi}_{(A_1, \dots, A_n)}(f) = \tilde{\Phi}_{(A_1, \dots, A_n)}\left(\sum_{q \in \mathbb{Z}^n} c_q z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}\right) = \quad (6.42')$$

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}^n} c_q \tilde{\Phi}_{(A_1, \dots, A_n)}(z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} c_q A_1^{q_1} \dots A_n^{q_n}.$$

Definiert man nun für festes $f \in \mathcal{E}^{(p|S)}(M)$ $T_f \in \mathcal{L}(H)$ durch $T_f :=$

$$\tilde{\Phi}_{(A_1, \dots, A_n)}(f), \text{ dann ist } \tilde{\Phi}_{T_f} : \mathcal{E}^{(p|S)}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(H) \text{ mit } \tilde{\Phi}_{T_f}(g) :=$$

$$\tilde{\Phi}_{(A_1, \dots, A_n)}(g \circ f) \text{ definiert, da } (g \circ f) \in \mathcal{E}^{(p|S)}(M) \text{ nach Satz 7.1.}$$

Außerdem ist $\tilde{\Phi}_{T_f}(1) = I$ und $\tilde{\Phi}_{T_f}(\underline{z}) = T_f$, wobei $\underline{z}$ die Koordinaten-

funktion auf $\mathbb{C}$ bezeichne. $\tilde{\Phi}_{T_f}$ ist offenbar linear und multiplikativ und außerdem stetig, da $g \mapsto (g \circ f)$ von $\mathcal{E}^{(p|S)}(\mathbb{C})$ nach $\mathcal{E}^{(p|S)}(M)$ stetig nach Satz 7.1. und $\tilde{\Phi}_{(A_1, \dots, A_n)}$ stetig.

Wie in (6.43) können wir nun auch die Darstellung von $\tilde{\Phi}_{T_f}(g)$ angeben. (Man vergleiche zu diesem Beispiel auch Colojoară/Foiaş [12], Chap.5).

Anhang :

§ 7. Ultradifferenzierbare Funktionen auf ultradifferenzierbaren Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

7.1. Satz : (Invarianz ultradifferenzierbarer Funktionen unter der Komposition)

M_p erfülle (M1), (M2) und (M3). Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{L}^{(M_p)}(U)$) reellwertig, sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\{(g_1(x), \dots, g_n(x)) \mid x \in U\} \subset V$, sowie $f \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ (bzw. $\mathcal{L}^{(M_p)}(V)$).

Definiere $w: U \rightarrow \mathbb{C}$ durch $w(x) := f(g_1(x), \dots, g_n(x))$ für $x \in U$, d.h.

mit $g(x) := (g_1(x), \dots, g_n(x))$, $x \in U$, ist $w = f \circ g$.

Dann gilt $w \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{L}^{(M_p)}(U)$). Falls $g = (g_1, \dots, g_n)$ fest gewählt wird, ist außerdem die Abbildung $f \mapsto w = f \circ g$ von $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ nach $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. von $\mathcal{L}^{(M_p)}(V)$ nach $\mathcal{L}^{(M_p)}(U)$) stetig.

Bew.:

Sei $x_0 \in U$ beliebig aber fest, es gilt die folgende Formel für die partiellen Ableitungen der Komposition von C^∞ -Funktionen f und g , $w = f \circ g$:

Für alle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \setminus \{0\}$ und mit $p := |\alpha|$ ist

$$(7.1) \quad \frac{D^\alpha w(x_0)}{\alpha!} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq |\beta| \leq p}} \frac{D^\beta f(y_0)}{\beta!} \cdot A_{\beta, \alpha}(x_0), \quad \text{wobei } y_0 := g(x_0),$$

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, und die 'Koeffizienten-Funktionen' $A_{\beta, \alpha}(x_0)$ haben die Gestalt:

$$(7.2) \quad A_{\beta, \alpha}(x_0) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{|\beta|} \in \mathbb{N}^m \setminus \{0\} \\ j_1 + \dots + j_{|\beta|} = \alpha}} \frac{D^{j_1} g_1(x_0)}{j_1!} \cdot \dots \cdot \frac{D^{j_{|\beta|}} g_{|\beta|}(x_0)}{j_{|\beta|}!} \cdot \frac{D^{j_{\beta_1+1}} g_2(x_0)}{(j_{\beta_1+1})!} \cdot \dots \cdot \frac{D^{j_{\beta_1+\beta_2}} g_2(x_0)}{(j_{\beta_1+\beta_2})!} \cdot \dots \cdot \frac{D^{j_{\beta_1+\dots+\beta_{n-1}+1}} g_n(x_0)}{(j_{\beta_1+\dots+\beta_{n-1}+1})!} \cdot \frac{D^{j_{|\beta|}} g_n(x_0)}{(j_{|\beta|})!}$$

Hierbei fallen für $\beta_i = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, die entsprechenden (also die g_i enthaltenden) Faktoren weg.

Die obige Formel beweist man mittels vollständiger Induktion (!) oder durch Taylorentwicklung von der Ordnung $p = |\alpha|$ von $w = f \circ g$ in $x_0 \in U$, von f in $y_0 = g(x_0) \in V$ und von g_i , $1 \leq i \leq n$, in $x_0 \in U$, anschließend Einsetzen und Vergleich der 'Koeffizienten'.

Sei nun $K \subset U \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und gelte für $1 \leq i \leq n$, daß

$$(7.3) \quad \sum_{j \in \mathbb{N}^m} \frac{1}{h^{|j|} M_{|j|}} \sup_{x \in K} |D^j g_i(x)| \leq C_h \quad \text{für } h > 0 \text{ und } C_h > 0$$

und für $\tilde{K} := g(K) \subset V \subset \mathbb{R}^n$ kompakt sei

$$(7.4) \quad \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{h_1^{|\beta|} M_{|\beta|}} \sup_{y \in \tilde{K}} |D^\beta f(y)| \leq \bar{C}_{h_1} \quad \text{für } h_1 > 0 \text{ und } \bar{C}_{h_1} > 0.$$

Für $w = f \circ g$ folgt dann für $\alpha \in \mathbb{N}^m \setminus \{0\}$, $x \in K$, $y := g(x)$, $p = |\alpha|$ und $M_p' := h^p \cdot M_p$, daß

$$\begin{aligned} (7.5) \quad \frac{|D^\alpha w(x)|}{M_{|\alpha|}'} &\leq \frac{|\alpha|!}{M_{|\alpha|}'} \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{|D^\beta f(y)|}{\beta!} |A_{\beta, \alpha}(x)| \\ &\quad 1 \leq |\beta| \leq p \\ &\leq \frac{|\alpha|!}{M_{|\alpha|}'} \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{\tilde{H}^{|\beta|}}{|\beta|!} |D^\beta f(y)| \cdot |A_{\beta, \alpha}(x)| \\ &\quad 1 \leq |\beta| \leq p \\ &\leq M_1' \cdot \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \tilde{H}^{|\beta|} \cdot \frac{|D^\beta f(y)|}{M_{|\beta|}'} \cdot \frac{(|\alpha| - |\beta| + 1)!}{M_{|\alpha| - |\beta| + 1}'} \cdot |A_{\beta, \alpha}(x)|, \\ &\quad 1 \leq |\beta| \leq p \end{aligned}$$

da $|\beta|! \leq \tilde{H}^{|\beta|} \cdot \beta!$ und da wegen $(\tilde{M}1)$ gilt, daß

$$(7.6) \quad \frac{M_{|\beta|}'}{|\beta|!} \cdot \frac{M_{|\alpha| - |\beta| + 1}'}{(|\alpha| - |\beta| + 1)!} \leq M_1' \cdot \frac{M_{|\alpha|}'}{|\alpha|!} \quad \text{für } 1 \leq |\beta| \leq |\alpha| = p.$$

Ebenso folgt aus $(\tilde{M}1)$, daß

$$(7.7) \quad \frac{M'_{|j_1|}}{|j_1|!} \cdot \dots \cdot \frac{M'_{|j_{|\beta|}|}}{|j_{|\beta|}|!} \leq M_1^{|\beta|-1} \cdot \frac{M'_{|\alpha|-|\beta|+1}}{(|\alpha|-|\beta|+1)!} \quad \text{für}$$

$j_1, \dots, j_{|\beta|} \in \mathbb{N}^m \setminus \{0\}$ mit $j_1 + \dots + j_{|\beta|} = \alpha$.

Beachtet man, daß für $j \in \mathbb{N}^m$ gilt $(|j|! / j!) \leq \tilde{H}^{|j|}$, wobei $\tilde{H} := 2^{m-1}$ gewählt werden kann, dann folgt aus (7.2) und (7.7) sowie (7.3), daß

$$(7.8) \quad \frac{(|\alpha|-|\beta|+1)!}{M'_{|\alpha|-|\beta|+1}} |A_{\beta, \alpha}(x)| \leq$$

$$M_1^{|\beta|-1} \cdot \tilde{H}^{|\alpha|} \cdot \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{|\beta|} \in \mathbb{N}^m \setminus \{0\} \\ j_1 + \dots + j_{|\beta|} = \alpha}} \frac{|D^{j_1} g_1(x)|}{M'_{|j_1|}} \cdot \dots \cdot \frac{|D^{j_{|\beta|}} g_{|\beta|}(x)|}{M'_{|j_{|\beta|}|}} \leq$$

$$M_1^{|\beta|-1} \cdot \tilde{H}^{|\alpha|} \cdot C_h^{|\beta|}.$$

Damit folgt aus (7.5) und (7.8), daß für $x \in K$ und $\alpha \in \mathbb{N}^m \setminus \{0\}$

$$(7.9) \quad \frac{|D^\alpha w(x)|}{M'_{|\alpha|}} \leq \tilde{H}^{|\alpha|} \cdot \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq |\beta| \leq p}} (M_1' \cdot \tilde{H} \cdot C_h)^{|\beta|} \cdot \frac{|D^\beta f(y)|}{M'_{|\beta|}}$$

Gilt (7.3) für ein $h > 0$ und (7.4) für ein $h_1 > 0$ ($\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ -Fall), dann sei oBdA $(M_1' \cdot \tilde{H} \cdot C_h) \geq 1$ und es folgt aus (7.9), daß

$$(7.9') \quad \frac{|D^\alpha w(x)|}{(M_1' \cdot \tilde{H}^2 \cdot C_h \cdot h)^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{|D^\beta f(y)|}{h^{|\beta|} M_{|\beta|}} \leq \bar{C}_h \quad \text{für alle } x \in K,$$

(wir können natürlich annehmen, daß $h \geq h_1$). Also folgt $w \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U)$ und die Abbildung $f \mapsto w = f \circ g$ von $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(V)$ nach $\mathcal{E}^{\{M_p\}}(U)$ ist stetig.

Gilt (7.3) für alle $h > 0$ und (7.4) für alle $h_1 > 0$ ($\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Fall), so setze für beliebig kleines $h > 0$ $h_1 := h / (M_1' \cdot \tilde{H} \cdot C_h)$, so daß aus (7.9) folgt:

$$(7.9'') \quad \frac{|D^\alpha w(x)|}{(\tilde{H} \cdot h)^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{|D^\beta f(y)|}{h_1^{|\beta|} M_{|\beta|}} \leq \tau_{h_1}, \text{ also folgt}$$

$w \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ und die Abbildung $f \mapsto w = f \circ g$ von $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ nach $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ ist stetig. qed.

7.1.' Bem.:

Für den $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Fall siehe zu Satz 7.1. auch Roumieu [46], Théorème 13 und Rudin [47].

7.2. Korollar :

Die Folge M_p erfülle $(\tilde{M}1)$, sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw.

$\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$) mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Dann ist auch $(1/g) \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$).

Bew.:

Sei in Satz 7.1. $n=1$ und $f(x) = 1/x$, $x \in V := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$) ist auch $\bar{g}$ und damit $g \cdot \bar{g} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$),

$g \cdot \bar{g}$ ist reellwertig und es gilt $g(x) \cdot \bar{g}(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Nach

Satz 7.1. ist also $f \circ (g \cdot \bar{g}) = 1/(g \cdot \bar{g}) \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$)

und damit auch $(1/g) = \bar{g} \cdot (1/(g \cdot \bar{g})) \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$), da M_p $(\tilde{M}1)$ erfüllt. qed.

7.3. Satz : (Invarianz unter Bildung der Umkehrfunktion)

Die Folge M_p erfülle $(\tilde{M}1)$ (bzw. außerdem $(M3)$). Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h: U \rightarrow V$ ein C^∞ -Diffeomorphismus.

Für $h=(h_1, \dots, h_n)$ gelte, daß $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$), dann

gilt auch für die Umkehrfunktion $g := h^{-1}$, $g=(g_1, \dots, g_n)$, daß

$g_1, \dots, g_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(V)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(V)$).

Bew.:

Wir betrachten zunächst den $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ -Fall, seien also $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U)$ wie oben. Für $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt, daß

$$(7.10) \quad (h_k \circ g)(y) = y_k, \text{ damit folgt für } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } p := |\alpha| \geq 2, \text{ daß}$$

$$(7.11) \quad D^\alpha (h_k \circ g)(y) = 0.$$

Nun ist für $x := g(y)$ und $p = |\alpha| \geq 2$ wie in (7.1) und (7.2)

$$(7.12) \quad D^\alpha (h_k \circ g)(y) = \alpha! \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq |\beta| \leq p}} \frac{D^\beta h_k(x)}{\beta!} \cdot A_{\beta, \alpha}(y), \text{ wobei wie}$$

in (7.2)

$$(7.13) \quad A_{\beta, \alpha}(y) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{|\beta|} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\} \\ j_1 + \dots + j_{|\beta|} = \alpha}} \frac{D^{j_1} g_1(y)}{j_1!} \dots \frac{D^{j_{|\beta|}} g_{|\beta|}(y)}{(j_{|\beta|})!} \dots \dots \dots$$

$$\cdot \frac{D^{j_{\beta_1} + \dots + j_{n-1} + 1} g_n(y)}{(j_{\beta_1} + \dots + j_{n-1} + 1)!} \dots \frac{D^{j_{|\beta|}} g_n(y)}{(j_{|\beta|})!}$$

mit $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Es folgt also aus (7.11) und (7.12), daß für $p = |\alpha| \geq 2$ gilt:

$$(7.14) \quad \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| = 1}} \frac{D^\beta h_k(x)}{\beta!} \cdot A_{\beta, \alpha}(y) = - \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 < |\beta| \leq p}} \frac{D^\beta h_k(x)}{\beta!} \cdot A_{\beta, \alpha}(y).$$

Für die linke Seite von (7.14) gilt

$$(7.15) \quad \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ |\beta| = 1}} \frac{D^\beta h_k(x)}{\beta!} \cdot A_{\beta, \alpha}(y) = \sum_{\ell=1}^n D^{e_\ell} h_k(x) \cdot A_{e_\ell, \alpha}(y)$$

$$= \sum_{\ell=1}^n D^{e_\ell} h_k(x) \cdot \frac{D^\alpha g_\ell(y)}{\alpha!}, \quad (7.13)$$

wobei e_ℓ , $\ell=1,\dots,n$, der ℓ -te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$ ist. Damit wird (7.14) zu

$$(7.14') \quad \sum_{\ell=1}^n D^{e_\ell} h_k(x) \frac{D^\alpha g_\ell(y)}{\alpha!} = - \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 < |\beta| \leq p}} \frac{D^\beta h_k(x)}{\beta!} \cdot A_{\beta,\alpha}(y)$$

für $k=1,\dots,n$.

Schreiben wir wie üblich die (n,n) -Matrix $((D^{e_k} h_k(x)))_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n}} =: h'(x)$

und definieren den Vektor $b(y) = (b_1(y), \dots, b_n(y)) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$(7.16) \quad b_k(y) := - \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} \frac{D^\beta h_k(x)}{\beta!} \cdot A_{\beta,\alpha}(y) \quad \text{für } k=1,\dots,n, \\ 1 < |\beta| \leq p$$

so entspricht (7.14') dem linearen Gleichungssystem

$$(7.14'') \quad h'(x) \cdot \frac{1}{\alpha!} \begin{pmatrix} D^\alpha g_1(y) \\ \vdots \\ D^\alpha g_n(y) \end{pmatrix} = b(y), \quad \text{wobei } x = g(y).$$

Da wegen $\det h'(x) \cdot \det g'(y) = 1$ gilt, daß $\det h'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, ist das Gleichungssystem (7.14'') eindeutig lösbar, mit der Cramerschen Regel gilt für $\ell=1,\dots,n$:

$$(7.17) \quad \frac{D^\alpha g_\ell(y)}{\alpha!} = \frac{1}{\det h'(x)} \det(D^{e_1} h_k(x), \dots, D^{e_{\ell-1}} h_k(x), b_k(y), D^{e_{\ell+1}} h_k(x), \dots, D^{e_n} h_k(x))_{1 \leq k \leq n}$$

Sei s_n die Permutationsgruppe von $\{1,\dots,n\}$ und $\epsilon(\sigma)$ das Vorzeichen von $\sigma \in s_n$, dann ergibt die Definition der Determinante sowie Multiplikation von (7.17) mit $(|\alpha|! / M_{|\alpha|})$, daß

$$(7.17') \quad \frac{\alpha! \cdot D^\alpha g_\ell(y)}{\alpha! \cdot M_{|\alpha|}} = \frac{1}{\det h'(x)} \cdot$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) D^{e_1 h_{\sigma(1)}}(x) \cdots D^{e_{\ell-1} h_{\sigma(\ell-1)}}(x) \cdot \frac{|\alpha|!}{M_{|\alpha|}} b_{\sigma(\ell)}(y) \cdot$$

$$\cdot D^{e_\ell + 1 h_{\sigma(\ell+1)}}(x) \cdots D^{e_n h_{\sigma(n)}}(x)$$

und damit

$$(7.17'') \quad \frac{|\alpha|! \cdot |D^\alpha g_\ell(y)|}{\alpha! \cdot M_{|\alpha|}} \leq$$

$$\frac{n!}{|\det h'(x)|} \cdot \sup_{\substack{k=1, \dots, n \\ r=1, \dots, n}} |D^{er} h_k(x)|^{n-1} \cdot \frac{|\alpha|!}{M_{|\alpha|}} |b_k(y)|.$$

Da $M_p(\tilde{M}1)$ erfüllt, folgt wie in (7.6), daß gilt

$$(7.18) \quad \frac{|\alpha|!}{M_{|\alpha|}} \leq M_1 \cdot \frac{|\beta|!}{M_{|\beta|}} \cdot \frac{(|\alpha| - |\beta| + 1)!}{M_{|\alpha| - |\beta| + 1}} \quad \text{für } 1 \leq |\beta| \leq |\alpha|, \text{ so daß}$$

mit der Definition (7.16) folgt :

$$(7.19) \quad \frac{|\alpha|!}{M_{|\alpha|}} |b_k(y)| \leq \frac{|\alpha|!}{M_{|\alpha|}} \cdot \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq |\beta| \leq |\alpha|}} \frac{|D^\beta h_k(x)|}{\beta!} |A_{\beta, \alpha}(y)|$$

$$\leq M_1 \cdot \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq |\beta| \leq |\alpha|}} \frac{|\beta|! |D^\beta h_k(x)|}{\beta! M_{|\beta|}} \cdot \frac{(|\alpha| - |\beta| + 1)!}{M_{|\alpha| - |\beta| + 1}} |A_{\beta, \alpha}(y)|.$$

Ebenso folgt wegen $(\tilde{M}1)$ wie in (7.7), daß

$$(7.18') \quad \frac{(|\alpha| - |\beta| + 1)!}{M_{|\alpha| - |\beta| + 1}} \leq M_1^{|\beta| - 1} \cdot \frac{|j_1|!}{M_{|j_1|}} \cdots \frac{|j_{|\beta|}|!}{M_{|j_{|\beta|}|}},$$

für $j_1, \dots, j_{|\beta|} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ mit $j_1 + \dots + j_{|\beta|} = \beta$.

Es folgt mit (7.13), daß für $1 < |\beta| \leq |\alpha|$

$$(7.20) \quad \frac{(|\alpha| - |\beta| + 1)!}{M_{|\alpha| - |\beta| + 1}} |A_{\beta, \alpha}(y)| \leq$$

$$M_1^{|\beta| - 1} \cdot \sum_{\substack{j_1, \dots, j_\beta \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\} \\ j_1 + \dots + j_\beta = \alpha}} \frac{|j_1|! |D^{j_1} g_1(y)|}{j_1! M_{|j_1|}} \dots \frac{|j_\beta|! |D^{j_\beta} g_n(y)|}{j_\beta! M_{|j_\beta|}}$$

Sei nun $K \subset V$ kompakt und $\tilde{K} := \{g(y) \mid y \in K\} \subset U$, dann setze

$$(7.21) \quad C_1 := \sup_{x \in \tilde{K}} \frac{1}{|\det h'(x)|} \quad \text{und} \quad C_2 := \sup_{x \in \tilde{K}} |D^{\epsilon_r} h_k(x)|, \\ k, r = 1, \dots, n$$

$$\text{sowie } C := n! \cdot C_1 \cdot C_2^{n-1}.$$

Damit folgt aus (7.17''), daß für $y \in K$ gilt:

$$(7.22) \quad \frac{|\alpha|! |D^\alpha g_k(y)|}{\alpha! M_{|\alpha|}} \leq C \cdot \sup_{k=1, \dots, n} \frac{|\alpha|!}{M_{|\alpha|}} |b_k(y)| \leq \quad (7.19)$$

$$C \cdot \sup_{k=1, \dots, n} M_1 \cdot \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 < |\beta| \leq |\alpha|}} \frac{|\beta|! |D^\beta h_k(x)|}{\beta! M_{|\beta|}} \cdot \frac{(|\alpha| - |\beta| + 1)!}{M_{|\alpha| - |\beta| + 1}} |A_{\beta, \alpha}(y)|$$

$$\leq C \cdot \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 < |\beta| \leq |\alpha|}} \frac{|\beta|! M_1^{|\beta|}}{\beta! M_{|\beta|}} \cdot \sup_{k=1, \dots, n} |D^\beta h_k(x)| \cdot$$

(7.20)

$$\sum_{\substack{j_1, \dots, j_\beta \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\} \\ j_1 + \dots + j_\beta = \alpha}} \frac{|j_1|! |D^{j_1} g_1(y)|}{j_1! M_{|j_1|}} \dots \frac{|j_\beta|! |D^{j_\beta} g_n(y)|}{j_\beta! M_{|j_\beta|}}$$

Wir definieren nun für $j \in \mathbb{N}$

$$(7.23) \quad v_j := \frac{(2j)!}{(j+1)! j!}, \text{ dann gilt wegen } v_{p+1} = \sum_{\substack{j_1, j_2 \in \mathbb{N} \\ j_1 + j_2 = p}} v_{j_1} \cdot v_{j_2}$$

für $p \in \mathbb{N}$, daß

$$(7.24) \quad v_{p+q-1} \geq \sum_{\substack{j_1, \dots, j_q \in \mathbb{N} \\ j_1 + \dots + j_q = p}} v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_q} \quad \text{für } q \in \mathbb{N}_+, \text{ und wegen}$$

$v_{j+1} \leq 4 v_j$ folgt aus (7.24), daß gilt:

$$(7.24') \quad \sum_{\substack{j_1, \dots, j_q \in \mathbb{N} \\ j_1 + \dots + j_q = p}} v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_q} \leq 4^{q-1} \cdot v_p.$$

Definieren wir nun für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$(7.23') \quad v_\alpha := \prod_{i=1}^n v_{\alpha_i}, \text{ wobei } v_{\alpha_i} \text{ nach (7.23) definiert ist für}$$

$i=1, \dots, n$, dann folgt für $q \in \mathbb{N}_+$:

$$(7.24'') \quad \sum_{\substack{j_1, \dots, j_q \in \mathbb{N}^n \\ j_1 + \dots + j_q = \alpha}} v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_q} =$$

$$\left(\sum_{j_{1,1} + \dots + j_{q,1} = \alpha_1} v_{j_{1,1}} \cdot \dots \cdot v_{j_{q,1}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{j_{1,n} + \dots + j_{q,n} = \alpha_n} v_{j_{1,n}} \cdot \dots \cdot v_{j_{q,n}} \right)$$

$$\stackrel{(7.24')}{\leq} 4^{q-1} \cdot v_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot 4^{q-1} \cdot v_{\alpha_n} = (4^n)^{q-1} \cdot v_\alpha.$$

Wir zeigen nun $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(V)$ durch vollständige Induktion nach

$p = |\alpha| \in \mathbb{N}_+$:

Sei $\bar{C}_1 > 0$ eine Konstante so, daß für $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = 1$, gilt

$$(7.25) \quad |D^\alpha g_\ell(y)| \leq \bar{C}_1 \cdot M_1 \quad \text{für alle } y \in K, \ell = 1, \dots, n.$$

Wir behaupten, daß für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $1 \leq |\alpha|$, gilt

$$(7.26) \quad \frac{|\alpha|! \cdot |D^\alpha g_\ell(y)|}{\alpha! \cdot \bar{h}^{|\alpha|-1} M_{|\alpha|}} \leq \bar{C}_1 \cdot v_\alpha \quad \text{für alle } y \in K, \ell = 1, \dots, n \text{ und}$$

für ein genügend groß zu wählendes festes $\bar{h} > 0$.

Für $|\alpha| = 1$ ist diese Aussage gerade (7.25), gelte also (7.26) bereits

für $j \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ anstelle von α , mit $|j| \leq |\alpha| - 1$. Dann folgt aus (7.22)

für $y \in K$, $\ell = 1, \dots, n$ und $|\alpha| \geq 2$:

$$(7.27) \quad \frac{|\alpha|! \cdot |D^\alpha g_\ell(y)|}{\alpha! \cdot \bar{h}^{|\alpha|-1} M_{|\alpha|}} \leq$$

$$C \cdot \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq |\beta| \leq p}} \frac{|\beta|! \cdot M_1^{|\beta|}}{\beta! \cdot \bar{h}^{|\beta|-1} M_{|\beta|}} \sup_{\substack{x \in \tilde{K} \\ k=1, \dots, n}} |D^\beta h_k(x)| \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{|\beta|} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\} \\ j_1 + \dots + j_{|\beta|} = \alpha}} \bar{C}_1^{|\beta|} \cdot v_{j_1} \cdot \dots \cdot v_{j_{|\beta|}}.$$

$$\leq C \left(\sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq |\beta| \leq p}} \frac{|\beta|! \cdot (M_1 \cdot \bar{C}_1 \cdot 4^n)^{|\beta|}}{\beta! \cdot \bar{h}^{|\beta|-1} M_{|\beta|}} \sup_{\substack{x \in \tilde{K} \\ k=1, \dots, n}} |D^\beta h_k(x)| \right) \cdot v_\alpha$$

$$\leq C \left(\sum_{r=2}^p \sum_{|\beta|=r} (\tilde{H} \cdot M_1 \cdot \bar{C}_1 \cdot 4^n)^r \cdot \frac{1}{\bar{h}^{r-1} M_r} \cdot \sup_{\substack{x \in \tilde{K} \\ k=1, \dots, n \\ |\beta|=r}} |D^\beta h_k(x)| \right) \cdot v_\alpha$$

Die beiden letzten Ungleichungen gelten wegen (7.24'') und da $|\beta|! \leq \tilde{H}^{|\beta|} \cdot \beta!$ für geeignetes $\tilde{H} > 0$.

Gelte nun für geeignetes $\bar{C}_2 > 0$ und $\bar{h}_1 > 0$, daß

$$(7.28) \quad \sup_{\substack{x \in \tilde{K}, \quad c! = r \\ k=1, \dots, n}} |D^{\beta} h_k(x)| \leq \bar{c}_2 \cdot \bar{h}_1^r \cdot M_r, \text{ dann folgt aus (7.27) ,}$$

(wenn man noch berücksichtigt, daß $\sum_{\substack{|\beta|=r \\ \beta \in \mathbb{N}^n}} 1 \leq (r+1)^n \leq \bar{c}_3 \cdot 2^r$ für geeignetes $\bar{c}_3 > 0$) :

$$(7.29) \quad \frac{\alpha! \cdot |D^{\alpha} g_k(y)|}{\alpha! \cdot \bar{h}^{|\alpha|-1} M_{|\alpha|}} \leq C \cdot \bar{c}_2 \cdot \bar{c}_3 \left(\sum_{r=2}^p (2 \cdot \tilde{H} M_1 \cdot \bar{c}_1 \cdot 4^n \cdot \bar{h}_1)^r \cdot \frac{1}{\bar{h}^{r-1}} \right) \cdot v_{\alpha}.$$

Setze $\bar{c}_4 := 2 \cdot \tilde{H} M_1 \cdot \bar{c}_1 \cdot 4^n \cdot \bar{h}_1$ und $\bar{c}_5 := C \cdot \bar{c}_2 \cdot \bar{c}_3 \cdot \bar{c}_4$, so folgt für $y \in K$,
 $k = 1, \dots, n$ und $|\alpha| \geq 2$:

$$(7.30) \quad \frac{|\alpha|! \cdot |D^{\alpha} g_k(y)|}{\alpha! \cdot \bar{h}^{|\alpha|-1} M_{|\alpha|}} \leq \bar{c}_5 \cdot \left(\sum_{r=2}^p \left(\frac{\bar{c}_4}{\bar{h}} \right)^{r-1} \right) \cdot v_{\alpha} \leq \bar{c}_5 \cdot \left(\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{c}_4}{\bar{h}} \right)^r \right) \cdot v_{\alpha}$$

$$= \bar{c}_5 \cdot \frac{\bar{c}_4}{\bar{h} - \bar{c}_4} \cdot v_{\alpha} \leq \bar{c}_1 v_{\alpha} \quad \text{für ein genügend großes } \bar{h} > \bar{c}_4 > 0.$$

Damit ist (7.26) bewiesen und es folgt offenbar, daß $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(V)$, da $K \subset V$ kompakt beliebig war. Den $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ -Fall führen wir mittels des folgenden Lemmas auf den $\mathcal{E}^{\{M_p\}}$ -Fall zurück :

7.4. Lemma :

Die Folge M_p erfülle $(\tilde{M}1)$ und $(M3)$, es seien $f_1, \dots, f_{\ell} \in \mathcal{E}^{\{M_p\}}(U)$,
 $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $K \subset U$ kompakt, dann existiert eine Folge N_p , die $(\tilde{M}1)$
 erfüllt und für die gilt:

$$(7.31) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{N_p}{M_p} \right)^{1/p} = 0 \quad \text{sowie}$$

$$(7.32) \quad \exists \quad C > 0 \quad \sup_{\substack{x \in K \\ k=1, \dots, \ell}} |D^{\alpha} f_k(x)| \leq C \cdot N_{|\alpha|} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Bew.:

Da $f_1, \dots, f_\ell \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$, gibt es für alle $h > 0$ ein $C > 0$, so daß

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f_k(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha| \cdot M_{|\alpha|}} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad k=1, \dots, \ell. \quad \text{Also existiert eine}$$

Nullfolge $\{h_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ mit $0 < h_{p+1} \leq h_p \leq 1$ für $p \in \mathbb{N}$, so daß

$$(7.33) \quad \sup_{x \in K} |D^\alpha f_k(x)| \leq \tilde{C} \cdot (h_{|\alpha|})^{|\alpha| \cdot M_{|\alpha|}} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad k=1, \dots, \ell, \quad \text{setze}$$

etwa

$$(7.34) \quad h_p := \sup_{\substack{x \in K, |\alpha| \geq p \\ k=1, \dots, \ell}} \left(\frac{|D^\alpha f_k(x)|}{M_{|\alpha|}} \right)^{1/|\alpha|} \quad \text{für } p \geq p_0, \quad \text{so daß}$$

$$h_p \leq 1, \quad \text{sonst } h_p = 1 \quad \text{für } p < p_0.$$

Wir definieren nun eine Folge $\{\tilde{h}_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ durch $\tilde{h}_0 := \tilde{h}_1 := \tilde{h}_2 := 1$ und

$$(7.35) \quad \tilde{h}_{p+1}^{p+1} := \max \left(h_{p+1}^{p+1}, \left(\frac{\tilde{h}_p^{2p}}{\tilde{h}_{p-1}^{p-1}} \right) \left(\frac{m_p^{(p+1)}}{p \cdot m_{p+1}} \right) \right) \quad \text{für } p \geq 2, \quad \text{wobei}$$

$$m_p := \frac{M_p}{M_{p-1}}, \quad \text{dann gilt:}$$

$$(7.36) \quad \text{i) } \tilde{h}_p \geq h_p \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N} \quad \text{ii) } \tilde{h}_{p+1} \leq \tilde{h}_p \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N}$$

$$\text{iii) } \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{h}_p = 0.$$

Die Behauptung i) ist klar, ii) zeigt man durch vollständige Induktion nach $p \in \mathbb{N}$: Offenbar gilt die Ungleichung für $p=0,1$ und für $p \geq 2$ gilt

$$\tilde{h}_{p+1} = \max \left(h_{p+1}, \tilde{h}_p \left(\frac{\tilde{h}_p}{\tilde{h}_{p-1}} \right)^{(p-1)/(p+1)} \left(\frac{m_p^{(p+1)}}{p \cdot m_{p+1}} \right)^{1/(p+1)} \right)$$

$$\leq \max \left(h_{p+1}, \tilde{h}_p \right) \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung und da } M_p \text{ (M1) er-}$$

füllt. Es folgt $\tilde{h}_{p+1} \leq \max \left(h_p, \tilde{h}_p \right) \leq \tilde{h}_p$ wegen i).

Zu iii) genügt es zu zeigen, daß $a_p := \frac{\tilde{h}_p^p}{\tilde{h}_{p-1}^{p-1}} \rightarrow 0$ für $p \rightarrow \infty$, denn

$\tilde{h}_p^p = \prod_{j=1}^p a_j$. Angenommen $\{a_p\}$ ist keine Nullfolge, so ist auch $\{\tilde{h}_p\}$ keine

Nullfolge und da $\{\tilde{h}_p\}$ monoton fallend, bedeutet dies, daß $\{h_p\} \rightarrow 0$, daß ein $p_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für $p \geq p_0$ gilt:

$$(7.37) \quad \tilde{h}_{p+1}^{p+1} = \tilde{h}_p^p \cdot \frac{\tilde{h}_p^p}{\tilde{h}_{p-1}^{p-1}} \cdot \frac{m_p(p+1)}{p m_{p+1}} \quad \text{und damit} \quad a_{p+1} = a_p \cdot \frac{m_p(p+1)}{p m_{p+1}}$$

für $p \geq p_0$, d.h. es gilt

$$(7.38) \quad a_{p_0+j} = a_{p_0} \cdot \frac{m_{p_0}(p_0+j)}{p_0 m_{p_0+j}} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_+. \quad \text{Da } M_p \text{ (M3) erfüllt,}$$

gilt $(m_p/p) \rightarrow \infty$ für $p \rightarrow \infty$, es folgt, daß $\{a_p\}$ eine Nullfolge sein muß.

Damit ist (7.36) gezeigt und wir können definieren:

$$(7.39) \quad N_p := \tilde{h}_p^p \cdot M_p \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N}, \text{ es gilt (7.31), da } \{\tilde{h}_p\} \rightarrow 0$$

für $p \rightarrow \infty$, N_p erfüllt (M1), denn mit $n_p := \frac{N_p}{N_{p-1}}$ gilt

$$\frac{n_p}{p} = \frac{N_p}{p N_{p-1}} = \frac{\tilde{h}_p^p \cdot M_p}{p \cdot \tilde{h}_{p-1}^{p-1} \cdot M_{p-1}} = \frac{\tilde{h}_p^p}{\tilde{h}_{p-1}^{p-1}} \cdot \frac{m_p}{p} \leq \frac{\tilde{h}_{p+1}^{p+1}}{\tilde{h}_p^p} \cdot \frac{m_{p+1}}{p+1} = \frac{n_{p+1}}{p+1}. \quad (7.35)$$

Schließlich gilt wegen $\tilde{h}_p \geq h_p$, daß

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f_k(x)| \leq \tilde{C} \cdot (h_{|\alpha|})^{|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|} \leq \tilde{C} \cdot (\tilde{h}_{|\alpha|})^{|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|} = \tilde{C} \cdot N_{|\alpha|} \quad \text{für}$$

$$\alpha \in \mathbb{N}^n, \quad k=1, \dots, \ell.$$

qed.

7.3. Bem.:

Setze nun für $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ aus Satz 7.3. in Lemma 7.4. $f_k := h_k$, $k=1, \dots, n$ und $K := \tilde{K}$. Dann ist Satz 7.3. auch für den $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Fall bewiesen.

Entsprechend der Definition von C^∞ -Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ können wir nun definieren :

7.5. Definition : (Ultradifferenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$)

Die Folge M_p erfülle $(\tilde{M}1)$, $(M2)$ und $(M3)$, es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $1 \leq k < n$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn für alle $x \in M$ gilt :

(7.40) Es existiert eine offene Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $h: U \rightarrow V$, so daß für $h = (h_1, \dots, h_n)$ gilt $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ und

$$h(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) := \{y = (y_1, \dots, y_n) \in V \mid y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

Völlig analog definieren wir $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Man beachte, daß insbesondere jede reell-analytische Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ auch $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, da M_p die Bedingung $(M3)$ erfüllt.

Entsprechend wie bei C^∞ -Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ haben wir die beiden folgenden äquivalenten Beschreibungen einer $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$:

7.6. Satz : (Ultradifferenzierbares Koordinatensystem um $x \in M$)

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$, wenn für alle $x \in M$ gilt :

(7.41) Es existiert eine offene Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$, eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ und eine injektive Funktion $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß für $f = (f_1, \dots, f_n)$ gilt $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(W)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(W)$) und

i) $f(W) = M \cap U$

ii) $f'(y) := ((\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(y)))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$ hat maximalen Rang (also Rang k)

für alle $y \in W$.

iii) $f^{-1}: M \cap U \rightarrow W$ ist stetig.

$f=(f_1, \dots, f_n)$ heißt (M_p) -differenzierbares (bzw. (M_p) -differenzierbares) Koordinatensystem um $x \in M$.

Bew.:

Gelte (7.40), so definiere $W := \{a \in \mathbb{R}^k \mid (a, 0) \in h(M \cap U)\}$ und definiere $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$(7.42) \quad f(a) = h^{-1}(a, 0) \quad \text{für } a \in W. \text{ Da } h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U) \text{ (bzw.}$$

$\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$), folgt wegen Satz 7.3. für $f=(f_1, \dots, f_n)$, daß auch $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(W)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(W)$). Offenbar sind (7.41) i) und iii) erfüllt.

Um ii) zu sehen definiere $H := (h_1, \dots, h_k)$, dann folgt wegen $H(f(y)) = y$ für alle $y \in W$, daß $H'(f(y)) \cdot f'(y) = I_k$, I_k die (k, k) -Einheitsmatrix, also muß $f'(y)$ maximalen Rang haben.

Gelte umgekehrt (7.41), sei $x := f(y)$ für $y \in W$ beliebig aber fest.

Wegen (7.41) ii) nehmen wir oBdA an, daß $\det \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(y) \right) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0$. Definiere $g: W \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$(7.43) \quad g(a, b) := f(a) + (0, b) \quad \text{für } a \in W, b \in \mathbb{R}^{n-k}, \text{ dann ist}$$

$g_1, \dots, g_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(W \times \mathbb{R}^{n-k})$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(W \times \mathbb{R}^{n-k})$) und $\det g'(a, b) = \det \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(a) \right) \right)_{1 \leq i, j \leq k}$, insbesondere folgt, daß $\det g'(y, 0) \neq 0$

für $y \in W$. Nach dem Satz über inverse Funktionen existiert eine offene

Umgebung $\tilde{V}_1 \subset W \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(y, 0)$ und eine offene Umgebung $\tilde{V}_2 \subset \mathbb{R}^n$ von $g(y, 0) = x$, so daß $g: \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_2$ eine C^∞ -Inverse $h: \tilde{V}_2 \rightarrow \tilde{V}_1$ hat.

Da aber $g_1|_{\tilde{V}_1}, \dots, g_n|_{\tilde{V}_1} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{V}_1)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{V}_1)$), gilt nach

Satz 7.3., daß mit $h=(h_1, \dots, h_n)$ auch $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{V}_2)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{V}_2)$).

Da f^{-1} stetig nach iii), gilt $\{f(a) \mid (a,0) \in \tilde{V}_1\} = f(W) \cap \tilde{U}$ für eine offene Menge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$. Definiere nun $V_2 := \tilde{V}_2 \cap \tilde{U}$ und $V_1 := g^{-1}(V_2)$, dann gilt $M \cap V_2 = \{f(a) \mid (a,0) \in V_1\} = \{g(a,0) \mid (a,0) \in V_1\}$ mit (7.43) und es folgt

$$(7.44) \quad h(M \cap V_2) = g^{-1}(M \cap V_2) = g^{-1} \{g(a,0) \mid (a,0) \in V_1\} = V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

Damit ist (7.40) gezeigt.

qed.

7.7. Satz : (Darstellung durch lokale Gleichungssysteme mit ultradifferenzierbaren Funktionen)

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k -dimensionale $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}_-$) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k < n$, wenn für alle $x \in M$ gilt :

(7.45) Es existiert eine offene Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$ und reellwertige Funktionen $\rho_1, \dots, \rho_{n-k} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$), so daß

i) $M \cap U = \{y \in U \mid \rho_1(y) = \dots = \rho_{n-k}(y) = 0\}$ und

ii) $((\frac{\partial}{\partial y_j} \rho_i(y)))_{\substack{1 \leq i \leq n-k \\ 1 \leq j \leq n}}$ hat Rang $n-k$ für $y \in M \cap U$.

Bew.:

Gelte (7.40), dann definiere ρ_i , $1 \leq i \leq n-k$, durch

$$(7.46) \quad \rho_i(y) = h_{k+i}(y) \quad \text{für } y \in U, \text{ dann gilt } \rho_1, \dots, \rho_{n-k}$$

$\in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$). Da $h: U \rightarrow V$ bijektiv und wegen

$h(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ folgt, daß $M \cap U = \{y \in U \mid \rho_1(y) = \dots = \rho_{n-k}(y) = 0\}$.

Da $h'(y)$, $y \in M \cap U$, wegen $h'(h^{-1}(\xi)) \cdot (h^{-1})'(\xi) = I_n$ maximalen Rang, also Rang n hat, hat auch

$$((\frac{\partial}{\partial y_j} \rho_i(y)))_{\substack{1 \leq i \leq n-k \\ 1 \leq j \leq n}} = ((\frac{\partial}{\partial y_j} h_{k+i}(y)))_{\substack{1 \leq i \leq n-k \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{maximalen}$$

Rang, also Rang $n-k$.

Gelte umgekehrt (7.45) für $x \in M$ beliebig aber fest. Wegen (7.45) ii)

nehmen wir oBdA an, daß $\det \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j} g_i(x) \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n-k \\ 1 \leq j \leq n-k}} \neq 0$. Definiere

$h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$(7.47) \quad h(y) := (y_1, \dots, y_k, g_1(y), \dots, g_{n-k}(y)) \quad \text{für alle } y \in U, \text{ dann}$$

gilt mit $h = (h_1, \dots, h_n)$, daß $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}^{(M_p)}(U)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(U)$),

außerdem ist $\det h'(x) \neq 0$, also gilt $\text{rg } h' = n$ in einer offenen Umgebung von x in U . Nach dem Satz über reguläre Abbildungen (implizite Funktionen) gibt es eine Umgebung $\tilde{U}$ von x in U , die durch h diffeomorph auf eine Umgebung V von $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ in $\mathbb{R}^n$ abgebildet wird. Nach Konstruktion und wegen (7.45) i) ist $h(M \cap \tilde{U}) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. qed.

Der folgende Satz dient zur Definition von $\{M_p\}$ -differenzierbaren (bzw. (M_p) -differenzierbaren) Funktionen auf einer $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$:

7.8. Satz :

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{E}^{(M_p)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\dim M = k$. Es bezeichne $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Komponenten, also $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ und $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ die kanonische Injektion $j(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.

Für eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ ist folgendes äquivalent :

i) Es existiert eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ von M und $\tilde{f} \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$) mit $\tilde{f}|_M = f$.

ii) Für jedes $x \in M$ und den lokalen Diffeomorphismus $h_x: U_x \rightarrow V_x$ aus Definition 7.5. gilt für die offene Menge $\tilde{V}_x \subset \mathbb{R}^k$ mit $\tilde{V}_x := p(V_x \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$, daß

$$f \circ h_x^{-1} \circ j \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{V}_x) \quad (\text{bzw. } \mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{V}_x)) .$$

Bew.:

i) $\Rightarrow$ ii) : Sei $x \in M$ beliebig aber fest und $y \in \tilde{V}_x$, dann gilt
 $(f \circ h_x^{-1} \circ j)(y) = (\tilde{f} \circ h_x^{-1} \circ j)(y)$, da $(h_x^{-1} \circ j)(y) \in M$. Also gilt mit
 Satz 7.1., daß $(f \circ h_x^{-1} \circ j) \in \mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{V}_x)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{V}_x)$), da $\tilde{f}$,
 h_x^{-1} und j aus $\mathcal{E}^{(Mp)}$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$) sind, h_x^{-1} wegen Satz 7.3..

ii) $\Rightarrow$ i) : Sei also für $x \in M$ $h_x: U_x \rightarrow V_x$ der lokale Diffeomorphismus
 aus Definition 7.5., dann kann V_x von der Form $V_x = V_1 \times V_2$, $V_1 \subset \mathbb{R}^k$
 offene Umgebung von $(x_1, \dots, x_k)$ und $V_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ offene Umgebung von
 $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$, angenommen werden, (durch Verkleinerung und Verschiebung des
 ursprünglichen V_x).

Für die Funktion $\tilde{f}_x := (f \circ h_x^{-1} \circ j) \circ p \circ h_x$ gilt $\tilde{f}_x \in \mathcal{E}^{(Mp)}(U_x)$ (bzw.
 $\mathcal{E}^{(Mp)}(U_x)$), da $(f \circ h_x^{-1} \circ j)$, p und h_x aus $\mathcal{E}^{(Mp)}$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$)
 sind. Außerdem gilt für $y \in M \cap U_x$, daß

$$(7.48) \quad \tilde{f}_x(y) = f(y) \quad , \quad \text{da } j \circ p|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} = \text{id} \quad .$$

Sei nun $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine lokal-finite Überdeckung von M aus offenen Mengen
 $U_i \subset \mathbb{R}^n$ mit $U_i \subset U_{x_i}$ für geeignete $x_i \in M$. Setze $\Omega := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ und sei
 $\{\chi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}^{(Mp)}(\Omega)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(\Omega)$) eine Zerlegung der Eins bzgl.
 der U_i in Ω . Definiere nun für $y \in \Omega$

$$(7.49) \quad \tilde{f}(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_i(y) \cdot \tilde{f}_{x_i}(y) \quad , \quad \text{wobei diejenigen Summanden, für}$$

die $\tilde{f}_{x_i}(y)$ nicht definiert ist, gleich 0 gesetzt werden. Es gilt, daß
 $\tilde{f} \in \mathcal{E}^{(Mp)}(\Omega)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(\Omega)$), außerdem ist für $y \in M$

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi_i(y) \cdot \tilde{f}_{x_i}(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}_y} \chi_i(y) \cdot f(y) = f(y) \quad , \quad \text{hierbei sei}$$

$$\mathbb{N}_y := \{i \in \mathbb{N} \mid y \in U_i\} \quad .$$

qed.

7.9. Definition :

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{E}^{(Mp)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$ -) Untermannigfaltigkeit, $\dim M = k$.

Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ultradifferenzierbar von der Klasse $\mathcal{E}^{(Mp)}$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$) auf M , Schreibweise: $f \in \mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ (bzw. $f \in \mathcal{E}^{(Mp)}(M)$), wenn eine der äquivalenten Bedingungen i) oder ii) aus Satz 7.8. für f erfüllt ist.

Ist $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von M mit offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, wie in Def. 7.5., (7.4o) und $h_i: U_i \rightarrow V_i$ die zugehörigen Diffeomorphismen, so definieren wir eine Topologie auf $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$) durch

$$(7.5o) \quad \mathcal{E}^{(Mp)}(M) = \text{proj}_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{V}_i) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}^{(Mp)}(M) = \text{proj}_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{V}_i)$$

Hierbei sei $\tilde{V}_i \subset \mathbb{R}^k$ offen wie in Satz 7.8. durch $\tilde{V}_i := p(V_i \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$ definiert, $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Komponenten.

Die Spektralabbildungen $\pi_i: \mathcal{E}^{(Mp)}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{V}_i)$ (bzw. $\pi_i: \mathcal{E}^{(Mp)}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{V}_i)$) sind natürlich gegeben durch $\pi_i(f) = f \circ h_i^{-1} \circ j$, $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ die kanonische Injektion.

7.1o. Bem.:

Die Definition (7.5o) der Topologie von $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ und $\mathcal{E}^{(Mp)}(M)$ ist unabhängig von der gewählten Überdeckung $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von M und den $\mathcal{E}^{(Mp)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$ -) Diffeomorphismen $h_i: U_i \rightarrow V_i$.

Sei nämlich $\{W_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine weitere Überdeckung von M mit offenen Mengen $W_\ell \subset \mathbb{R}^n$ und $w_\ell: W_\ell \rightarrow Z_\ell$ $\mathcal{E}^{(Mp)}$ - (bzw. $\mathcal{E}^{(Mp)}$ -) Diffeomorphismen, so daß (7.4o) entsprechend gilt. Gelte $\{f_m\}_{m \in \mathbb{I}} \rightarrow 0$ in $\text{proj}_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{V}_i)$

für $\{f_m\}_{m \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{E}^{(Mp)}(M)$, zeige $\{f_m\}_{m \in \mathbb{I}} \rightarrow 0$ in $\text{proj}_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{Z}_\ell)$. Für

alle $i \in \mathbb{N}$ gilt also, daß $\{f_m \circ h_i^{-1} \circ j\}_{m \in \mathbb{I}} \rightarrow 0$ in $\mathcal{E}^{(Mp)}(\tilde{V}_i)$, zu

zeigen ist, daß für alle $\ell \in \mathbb{N}$ $\{f_m \circ w_\ell^{-1} \circ j\}_{m \in I} \rightarrow 0$ in $\mathcal{E}^{(M_p)}(\tilde{Z}_\ell)$, $\tilde{Z}_\ell := p(Z_\ell \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) \subset \mathbb{R}^k$ offen.

Sei also $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest und $K \subset \tilde{Z}_\ell$ kompakt. Die kompakte Menge $X := (w_\ell^{-1} \circ j)(K) \subset M$ kann durch endlich viele Mengen $U_{i_1}, \dots, U_{i_r}$ mit $X \cap U_{i_q} \neq \emptyset$ für $1 \leq q \leq r$ überdeckt werden.

Sei $X_{i_q} \subset X \cap U_{i_q}$ kompakt, so daß auch $(\bigcup_{1 \leq q \leq r} X_{i_q}) \supset X$. Definiere

nun $\tilde{K}_{i_q} := (p \circ h_{i_q})(X_{i_q}) \subset \tilde{V}_{i_q}$ kompakt, dann gilt nach Voraussetzung,

daß $\{f_m \circ h_{i_q} \circ j\}_{m \in I} \rightarrow 0$ gleichmäßig auf $\tilde{K}_{i_q}$ in der $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Topologie für $1 \leq q \leq r$. Nun ist aber

$$(7.51) \quad (f_m \circ w_\ell^{-1} \circ j)(y) = (f_m \circ h_{i_q}^{-1} \circ h_{i_q} \circ w_\ell^{-1} \circ j)(y) = \\ (f_m \circ h_{i_q}^{-1} \circ j) \circ (p \circ h_{i_q} \circ w_\ell^{-1} \circ j)(y)$$

für $y \in (w_\ell^{-1} \circ j)^{-1}(X \cap U_{i_q})$. Wegen Satz 7.1. gilt also $\{f_m \circ w_\ell^{-1} \circ j\}_{m \in I} \rightarrow 0$ gleichmäßig auf $(p \circ w_\ell)(X_{i_q})$ für $1 \leq q \leq r$ und damit gleichmäßig auf $K \subset \tilde{Z}_\ell$.

Aus Symmetriegründen gilt nun auch die umgekehrte Richtung, damit sind beide Topologien äquivalent. Den $\mathcal{E}^{(M_p)}$ -Fall beweist man völlig analog.

qed.

Ersetzt man in Definition 7.5., Satz 7.6., Satz 7.7., Satz 7.8. und Definition 7.9. sowie Bem. 7.10. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}$ durch C^∞ , so erhält man die üblichen und wohlbekannten Definitionen und Aussagen über C^∞ -Untermannigfaltigkeiten M des $\mathbb{R}^n$ und den Raum $C^\infty(M)$, vgl. z.B. Dieudonné [13].

Zusatz-Bemerkungen :

1.) Sehr früh tritt die Idee, gewisses Wachstumsverhalten von Operatoren zur Gewinnung invarianter Unterräume zu benutzen, auf bei Wermer [59a] . Man vergleiche hierzu §6 , 6.14. .

2.) Zu §7 , Satz 7.3. vergleiche man Komatsu [30a] , dort wird (unter etwas anderen Bedingungen an M_p und mit einer anderen Methode als im Beweis von Satz 7.3.) der Satz über implizite Funktionen für ultradifferenzierbare Abbildungen gezeigt. (Wir danken H.-J. Petzsche für den Hinweis auf diese Arbeit.)

3.) Unabhängig vom Verfasser (Satz 1.5.) haben D.Vogt/H.-J. Petzsche den folgenden Ansatz (im Zusammenhang mit Komatsu [29],§11) gefunden:

Definiere zu $g \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{R})$) das Whitney-Feld

$(D^\alpha \tilde{f})_{\alpha \in \mathbb{N}^2}$ auf $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} \subset \mathbb{C}$ durch

$$D^\alpha \tilde{f}(x,0) := i^{|\alpha|} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|\alpha|} g(x) \quad \text{für alle } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2, x \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}(x,0) &= \frac{1}{2} D^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{f}(x,0) = \frac{1}{2} (D^{\alpha+(1,0)} \tilde{f}(x,0) + i D^{\alpha+(0,1)} \tilde{f}(x,0)) \\ &= \frac{1}{2} \left(i^{|\alpha|} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|\alpha|+1} g(x) + i^{|\alpha|+2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|\alpha|+1} g(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Verwende nun wieder die Whitney-Fortsetzung nach Komatsu [30], Theorem

4.5. , dann folgt: Es existiert ein $F \in \mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C})$ (bzw. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\mathbb{C})$) mit

$$F|_{\mathbb{R}} = g \quad \text{und} \quad D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(x,0) = D^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}(x,0) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^2, x \in \mathbb{R}.$$

Hierauf machte mich Herr Vogt in Oberwolfach (Funktionalanalysis-Tagung Oktober 1979) aufmerksam.

4.) Im Zusammenhang mit der Waelbroeck-Koppelman Formel verweisen wir noch auf Martineau, "Fonctionnelles Analytiques", Actes, Congrès intern. Math. 1970 (Nice), Tome 2, S. 635 - 642 .

Zusammenfassung :

Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbb{C}$ mit Einselement e , für $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ bezeichne $\sigma(a)$ das gemeinsame Spektrum von a und $\phi_a: \mathcal{O}(\sigma(a)) \rightarrow A$ den holomorphen Funktorkalkül für a nach Shilov-Arens/Calderon-Waelbroeck. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem folgenden Fortsetzungsproblem für ϕ_a : Unter welchen Bedingungen kann ϕ_a (eindeutig) fortgesetzt werden auf 'konkrete' Funktionenalgebren, die die Zerlegung der Eins besitzen, wenn $\sigma(a) \subset S \subset \mathbb{C}^n$, für geeignete, möglichst allgemeine $S \subset \mathbb{C}^n$. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf Arbeiten von Tillmann, Albrecht, Waelbroeck, Nguyen t.H. und Wrobel. Zur Lösung des obigen Fortsetzungsproblems zeigen wir zunächst -angeregt durch Ergebnisse von Hörmander/Wermer und Harvey/Wells- zwei Sätze über holomorphe Approximation, (der Beweis verwendet $\bar{\partial}$ -Methoden der komplexen Analysis sowie einige Methoden aus der Theorie partieller Differentialgleichungen.) 1.) Ist $M \subset \mathbb{C}^n$ eine (M_p) -differenzierbare, total-reelle Untermannigfaltigkeit, so hat die kanonische Restriktion $\mathcal{F}: \mathcal{O}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ dichtes Bild. 2.) Ist $S \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und ist für eine kompakte Teilmenge $K_0 \subset S$ $M := S \setminus K_0$ wie oben, so hat die kanonische Restriktion $\mathcal{F}: \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ dichtes Bild, falls S ein geeignetes Umgebungssystem aus Holomorphiegebieten besitzt. Hierbei bezeichnet $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ den Raum aller (M_p) -differenzierbaren Funktionen (nach Beurling-Komatsu) auf M , sowie $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ den Raum aller auf K_0 holomorphen und auf M (M_p) -differenzierbaren Funktionen. Unter Benutzung dieser beiden Sätze entwickeln wir dann eine Methode, um den holomorphen Funktorkalkül für $a = (a_1, \dots, a_n)$ auf die Algebra $\mathcal{E}^{(M_p)}(M)$ (im Fall $\sigma(a) \subset M$) bzw. auf die Algebra $\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0)$ (im Fall $\sigma(a) \subset S$, $M := S \setminus K_0$ wie oben) eindeutig stetig, linear und multiplikativ fortzusetzen, falls die Differentialform $\omega := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} u_j \bar{\partial} u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\bar{\partial} u_j} \wedge \dots \wedge \bar{\partial} u_n$, (wobei $u_1, \dots, u_n \in C^\infty(\mathbb{C}^n \setminus \sigma(a), A)$ mit $\sum_{j=1}^n (z_j - a_j) u_j(z) = e$) ein gewisses exponentielles Wachstum bei Annäherung an M nicht überschreitet. Insbesondere zeigen wir eine Darstellung von ϕ_a durch eine A -wertige Cauchy-Fantappiè-Koppelman Formel und beweisen dann ein geeignetes Faktorisierungsprinzip zur Lösung des Fortsetzungsproblems. Ersetzt man die exponentielle Wachstumsbedingung für ω durch eine polynomiale, so kann $\mathcal{E}^{(M_p)}$ durch C^∞ ersetzt werden. Die von uns bewiesenen Sätze sind auch auf n -Tupel kommutierender Operatoren auf einem Banachraum und den Taylorkalkül anwendbar.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0

$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

$\bar{K}$ ist der Abschluß und ∂K der Rand von K

$C(K)$, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, ist der Raum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf K .

$C^r(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist der Raum aller r -mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf Ω , $0 \leq r \leq \infty$.

$C^r(M)$, wobei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^r -Untermannigfaltigkeit, ist der Raum aller r -mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf M , $0 \leq r \leq \infty$.

$C^\infty(\Omega, X)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und X Banachraum, ist der Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf Ω mit Werten in X .

$\mathcal{O}(U)$, wobei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, ist der Raum aller holomorphen Funktionen auf U , siehe S.1.

$\mathcal{O}(S)$, wobei $S \subset \mathbb{C}^n$, ist der Raum aller auf einer offenen Umgebung von S holomorphen Funktionen, siehe S.1.

Seien $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ Multiindizes, dann ist

$$D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

$\det B$ Determinante einer (n,n) -Matrix B

rg B Rang einer Matrix B

$$|z| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2} \quad \text{für } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$\partial / \partial z_j, \quad \partial / \partial \bar{z}_j, \quad d, \quad \partial, \quad \bar{\partial} \quad \text{siehe S.55}$$

$\text{proj } E_\alpha$, $\text{ind } E_\alpha$ ist der projektive (bzw. induktive) lokalkonvexe
Limes der lokalkonvexen Räume E_α

$$\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega), \quad \mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega) \quad \text{siehe S.4}$$

$$\mathcal{E}^{(M_p)}(M), \quad \mathcal{E}^{\{M_p\}}(M) \quad \text{siehe S.6 und S.128}$$

supp Support einer Funktion oder (Ultra-)Distribution

int X Menge der inneren Punkte von X

$H^i(U, \mathcal{O})$, wobei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, ist die i -te Kohomologiegruppe von U mit
Werten in der Garbe $\mathcal{O}$

$$C^\infty \mathcal{O}(M, K_0) \quad \text{siehe S.37}$$

$$\mathcal{E}^{(M_p)} \mathcal{O}(M, K_0), \quad \mathcal{E}^{\{M_p\}} \mathcal{O}(M, K_0) \quad \text{siehe S.37}$$

$\sigma(a)$ ist das gemeinsame Spektrum von $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, A kommutative Banachalgebra mit Einselement, siehe S.53

$\mathcal{L}(X, Y)$ Raum aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y , wobei
 X, Y topologische Vektorräume

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$$

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$$

$\sigma(a, X)$ ist das Taylorspektrum von n kommutierenden Operatoren $a = (a_1, \dots, a_n)$, wobei $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, siehe S.64

ϕ_a der holomorphe Funktionalkalkül für $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, A kommutative Banachalgebra mit Einselement, siehe S.53

$$d(z, K) = \inf_{x \in K} |z - x|, \quad \text{die euklidische Distanz von } z \in \mathbb{R}^n \text{ zu } K \subset \mathbb{R}^n$$

$$T_\epsilon(K) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid d(z, K) < \epsilon\} \quad \text{und} \quad K_\epsilon = \{z \in \mathbb{R}^n \mid d(z, K) \leq \epsilon\} \quad \text{für} \\ \epsilon > 0, \quad K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}$$

$E^{(M_p)}(V, K)$ siehe S.69

$E(V, K)$ siehe S.69

$T_x(M)$ Tangentialraum der differenzierbaren Untermannigfaltigkeit
 $M \subset \mathbb{R}^n$ in $x \in M$

$\dim_{\mathbb{R}} M$ reelle Dimension der differenzierbaren Untermannigfaltigkeit
 $M \subset \mathbb{C}^n (\cong \mathbb{R}^{2n})$

$E^{(M_p)}(V, S, K_0)$ siehe S.85

$E(V, S, K_0)$ siehe S.85

$\Delta(A)$ ist der Raum aller multiplikativen stetigen linearen Funktionale
 $\neq 0$ auf A , versehen mit der $\sigma(A', A)$ -Topologie, A kommutative
 Banachalgebra mit Einselement

Literatur

- [1] Albrecht, E., Funktionalkalküle in mehreren Veränderlichen für stetige lineare Operatoren auf Banachräumen, *manuscripta math.* 14, S. 1 - 40 , (1974)
- [2] Albrecht, E., Der spektrale Abbildungssatz für nichtanalytische Funktionalkalküle in mehreren Veränderlichen, *manuscripta math.* 14, S. 263 - 277 , (1974)
- [3] Albrecht, E., Generalized Spectral Operators, in: *Functional Analysis: Surveys and Recent Results*, North-Holland Math. Studies, S. 259 - 277 , (1977)
- [4] Albrecht, E., On joint spectra, *Studia Math.*, T. LXIV , S. 263 - 271 , (1979)
- [5] Albrecht, E., Frunză, St., Non-analytic functional calculi in several variables, *manuscripta math.* 18 , S. 327 -336 , (1976)
- [6] Arens, R., Calderón, A., Analytic functions of several Banach algebra elements, *Ann. of Math.* 62 , S. 204 - 216 , (1955)
- [7] Björck, G., Linear partial differential operators and generalized distributions, *Ark. Mat.* 6 , S. 351 - 407 , (1967)
- [8] Björk, J.-E., Holomorphic convexity and analytic structures in Banach algebras, *Ark. Mat.* 9 , S. 39 - 54 , (1971)
- [9] Bourbaki, N., *Théories Spectrales*, Hermann Paris 1967
- [10] Cioranescu, I., Operator-Valued Ultradistributions in the Spectral Theory, *Math. Ann.* 223 , S. 1 - 12 , (1976)
- [11] Čirka, E.M., Approximation By Holomorphic Functions On Smooth Manifolds In $\mathbb{C}^n$, *Mat. Sbornik Tom 78(120)* (1969) No.1, Übersetzung: *Math. USSR Sbornik Vol. 7* , S. 95 - 114 , (1969) No.1
- [12] Colojoară, I., Foaş, C., *Theory of Generalized Spectral Operators*, Gordon and Breach, New York-London-Paris, 1968
- [13] Dieudonné, J., *Treatise on Analysis III* , Academic Press, New York, London 1972
- [14] Dunford, N., Schwartz, J.T., *Linear Operators, Part II*, Interscience Publishers, New York-London-Sydney, 1963
- [15] Ferrier, J.-P., *Spectral Theory and Complex Analysis*, North-Holland Math. Studies 1973
- [16] Gamelin, T., *Uniform Algebras*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1969

- [17] Gramsch, B., Funktionalkalkül mehrerer Veränderlichen in lokalbeschränkten Algebren, Math. Ann. 174 , S. 311 -344 , (1967)
- [18] Gramsch, B., Über eine Fortsetzungsmethode der Dualitätstheorie lokalkonvexer Räume, Ausarbeitung Kaiserslautern 1975
- [19] Gramsch, B., An extension method of the duality theory of locally convex spaces with applications to extension kernels and the operational calculus, in: Functional Analysis: Surveys and Recent Results, North-Holland Math. Studies, S. 131 - 147 , (1977)
- [20] Gramsch, B., Ein Schwach-Stark-Prinzip der Dualitätstheorie lokalkonvexer Räume als Fortsetzungsmethode, Math. Z. 156 , S. 217 - 230 , (1977)
- [21] Grauert, H., Remmert, R., Theorie der Steinschen Räume, Springer Berlin/Heidelberg/New York 1977
- [22] Harvey, R., Wells, R.O., jr., Compact holomorphically convex subsets of a Stein manifold, Trans. AMS 136 , S. 509 - 516 , (1969)
- [23] Harvey, R., Wells, R.O., jr., Holomorphic Approximation and Hyperfunction Theory on a C^1 Totally Real Submanifold of a Complex Manifold, Math. Ann. 197 , S. 287 - 318 , (1972)
- [24] Hörmander, L., L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator, Acta Math. 113 , S. 89 -152 , (1965)
- [25] Hörmander, L., An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, Princeton, N.J. 1966
- [26] Hörmander, L., Wermer, J., Uniform approximation on compact sets in C^n , Math. Scand. 23 , S. 5 - 21 , (1968)
- [27] Jewell, N.P., Lubin, A.R., Commuting weighted shifts and analytic function theory in several variables, J. Operator Theory 1 , S. 207 - 223 , (1979)
- [28] Kitano, K., Invariant subspaces of some non-selfadjoint operators, Tôhoku Math. J., Vol. 20 , S. 313 - 322 , (1968)
- [29] Komatsu, H., Ultradistributions I, Structure theorems and a characterisation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 20 , S. 25 - 105 , (1973)
- [30] Komatsu, H., Ultradistributions II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 24 , S. 607 - 628 , (1977)
- [30a] Komatsu, H., The Implicit Function Theorem for Ultradifferentiable Mappings, Proc. Japan Acad. 55 , Ser. A, S. 69 - 72 , (1979)

- [31] Koppelman, W., The Cauchy integral for functions of several complex variables, Bull. AMS 73 , S. 373 - 377, (1967)
- [32] Koppelman, W., The Cauchy integral for differential forms, Bull. AMS 73 , S. 554 - 556 , (1967)
- [33] Ljubič, J.I., Macae, V.I., On operators with a separable spectrum, Math. Sb. 56(98) (1962), AMS Translations, ser. 2, Vol. 47 , S. 89 - 129, (1965)
- [34] Maeda, F.-Y., Generalized scalar operators whose spectra are contained in a Jordan curve, Illinois J. Math. 10 , S. 431 - 459 , (1966)
- [35] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press 1966
- [36] Nirenberg, R., Wells, R.O., jr., Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold, Trans. AMS 142 , S. 15 - 35 , (1969)
- [37] Nguyen t.H., Croissance des coefficients spectraux et calcul fonctionnel, Thèse Université Libre de Bruxelles 1976
- [38] Nguyen t.H., Calcul fonctionnel dépendant de la croissance des coefficients spectraux, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 27 , 4 , S. 169 - 199 , (1977)
- [39] Øvrelid, N., Integral representation formulas and L^p -estimates for the $\bar{\partial}$ -equation, Math. Scand. 29 , S. 137 - 160 , (1971)
- [40] Petzsche, H.-J., Die Nuklearität der Ultradistributionsräume und der Satz vom Kern I, manuscripta math. 24 , S. 133 - 171 , (1978)
- [41] Pflug, R.P., Holomorphiegebiete, pseudokonvexe Gebiete und das Levi-Problem, Springer Lecture Notes 432 , Berlin/Heidelberg/New York 1975
- [41a] Pflug, R.P., Private Mitteilung, Brief 1979
- [42] Radjavi, H., Rosenthal, P., Invariant Subspaces, Springer Berlin/Heidelberg/New York 1973
- [43] Range, R.M., Siu, Y.-T., C^k approximation by holomorphic functions and $\bar{\partial}$ -closed forms on C^k submanifolds of a complex manifold, Math. Ann. 210 , S. 105 - 122 , (1974)
- [44] Robertson, A.P., Robertson, W.J., Topological Vector Spaces, second ed., Cambridge Univ. Press 1973
- [45] Roumieu, C., Sur quelques extensions de la notation de distribution, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris, 3.sér., 77 , S. 41 - 121 , (1960)

- [46] Roumieu, C., Ultra-distributions definies sur R^n et sur certaines classes de variétés differentiables, J. Anal. Math. 10 , S. 153 - 192 , (1962-63)
- [47] Rudin, W., Division in Algebras of Infinitely Differentiable Functions, J. Math. Mech. 11 , No.5, S. 797 - 809 , (1962)
- [48] Schwartz, L., Théorie des Distributions, 3. éd., Hermann Paris 1966
- [49] Shilov, G.E., On decomposition of a commutative normed ring in a direct sum of ideals, Math. Sb. 32(74) , S. 353 - 364 , (1953) und AMS Transl., ser.2, Vol. 1 , S. 37 - 48 , (1955)
- [50] Taylor, J.L., A joint spectrum for several commuting operators, J. Functional Analysis 6 , S. 172 - 191 , (1970)
- [51] Taylor, J.L., The analytic functional calculus for several commuting operators, Acta Math. 125 , S. 1 - 38 , (1970)
- [52] Taylor, J.L., Several variable spectral theory, in: Proceedings of a Symposium on Functional Analysis, Academic Press, New York / London 1970
- [53] Tillmann, H.G., Eine Erweiterung des Funktionalkalküls für lineare Operatoren, Math. Ann. 151 , S. 424 - 430 , (1963)
- [54] Treves, F., Topological Vector Spaces, Distributions And Kernels, Academic Press, New York/London 1967
- [55] Waelbroeck, L., Le calcul symbolique dans les algèbres commutative, J. de Math. P. et Appl. 33 , S. 147 - 186 , (1954)
- [56] Waelbroeck, L., Etude spectrale des algèbres complètes, Acad. Roy. Belg. Cl. de Sc., Mémoires 1960
- [57] Waelbroeck, L., Calcul symbolique lié à la croissance de la résol-vante, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano XXXIV , S. 51 - 72 (1964)
- [58] Wells, R.O. jr., Function Theory on Differentiable Submanifolds, in: Contributions to Analysis, Academic Press, New York/London 1974
- [59] Wermer, J., Banach Algebras and Several Complex Variables, Second Ed., Springer New York Heidelberg Berlin 1976
- [59a] Wermer, J., The existence of invariant subspaces, Duke Math. J. 19, S. 615 - 622 , (1952)
- [60] Wilde, de, M., Réseaux dans les espaces linéaires a semi-normes, Mém. Soc. Roy. Sci. Liège 18 , 1969
- [61] Wrobel, C., Extension du calcul fonctionnel holomorphe et appli-cation à l'approximation, C.R. Acad. Sc. Paris, A275 , S. 175 - 177 (1972)

- [62] Wrobel, C., Extension du calcul fonctionnel holomorphe, Rev. Math. no. 1 , Inst. E. Cartan, Nancy 1975
- [63] Zsidó, L., Invariant subspaces of compact perturbations of linear operators in Banach spaces, J. Operator Theory 1 , S. 225 - 260 , (1979)

Lebenslauf

Geboren am 11. Mai 1953 in Wuppertal als Sohn des kaufm. Angestellten Alfred Droste und seiner Ehefrau Ursula, geb. Bergmann.

Nach der Volksschule (1959-63) ab 1963 Besuch des Röntgen-Gymnasiums in Remscheid-Lennep, dort Abitur im Mai 1971 .

Mit Beginn des Wintersemesters 1971/72 Studium der Mathematik an der Universität Bonn. Ab Wintersemester 1974/75 Fortsetzung des Studiums an der Universität Kaiserslautern.

Diplom in Mathematik im März 1977 (Kaiserslautern).

Seit dem 1.10.1977 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz.

Mainz, im März 1980

